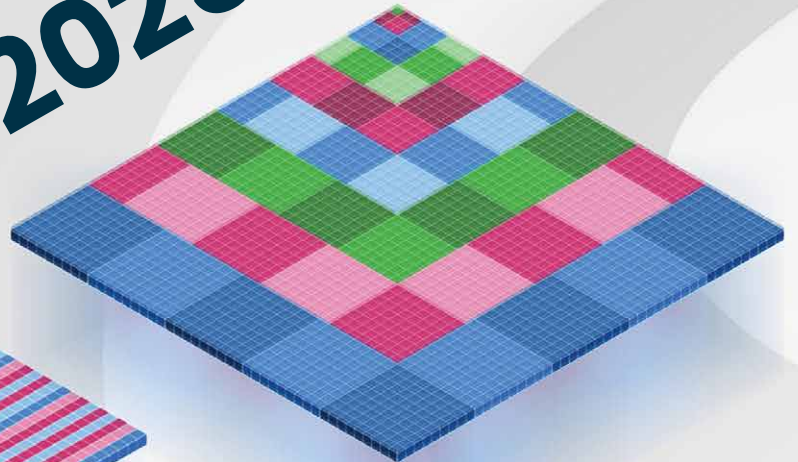
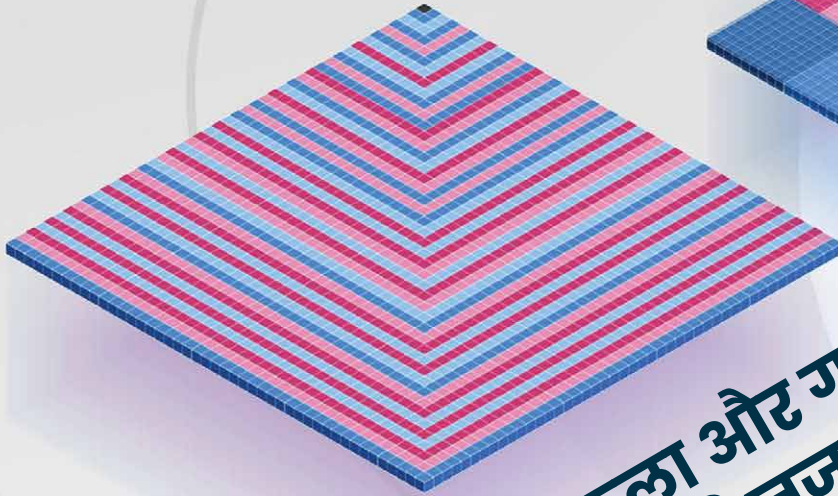


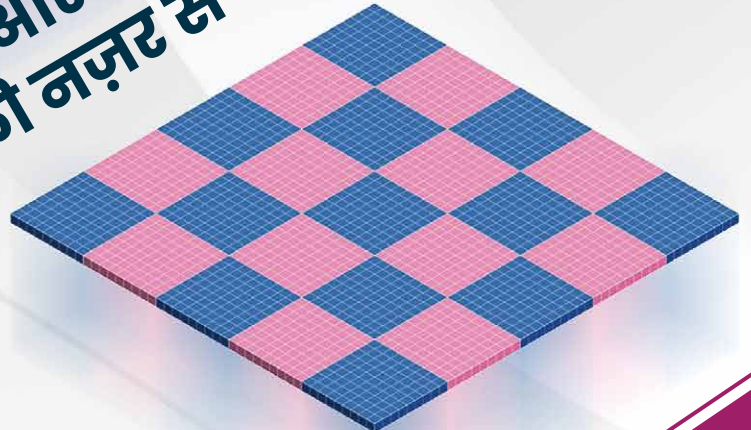
अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी एट राइट एंगल्स

स्कूल गणित के लिए एक संसाधन

देखें साल
2025



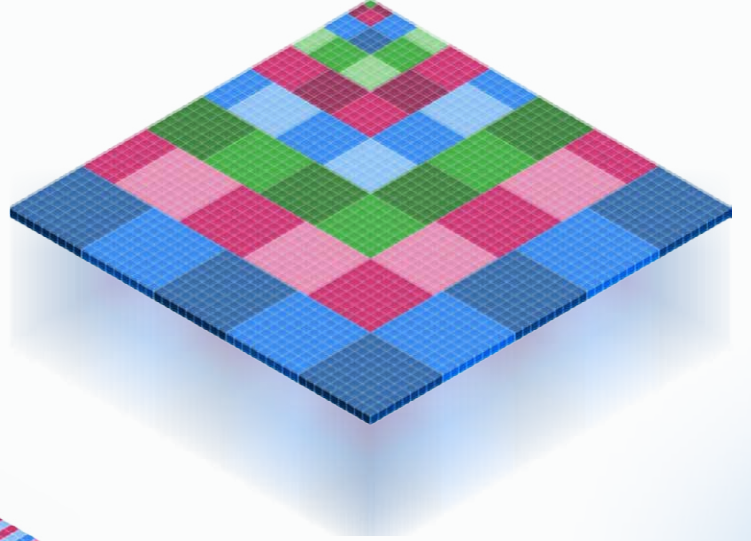
कला और गणित
की नज़र से



आइए साल 2025 को कला और गणित की नज़र से देखते हैं

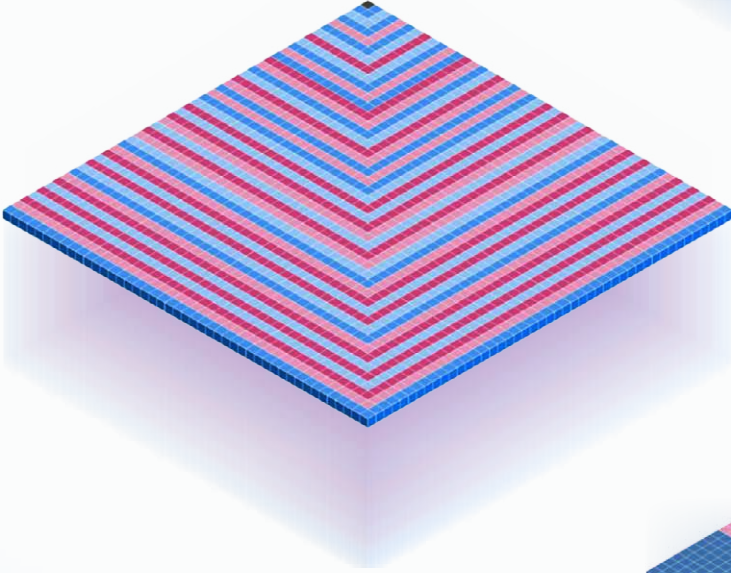
$$(1+2+3+4+5+6+7+8+9)^2 = 2025$$

1 से 9 तक की प्राकृत संख्याओं के योग का वर्ग



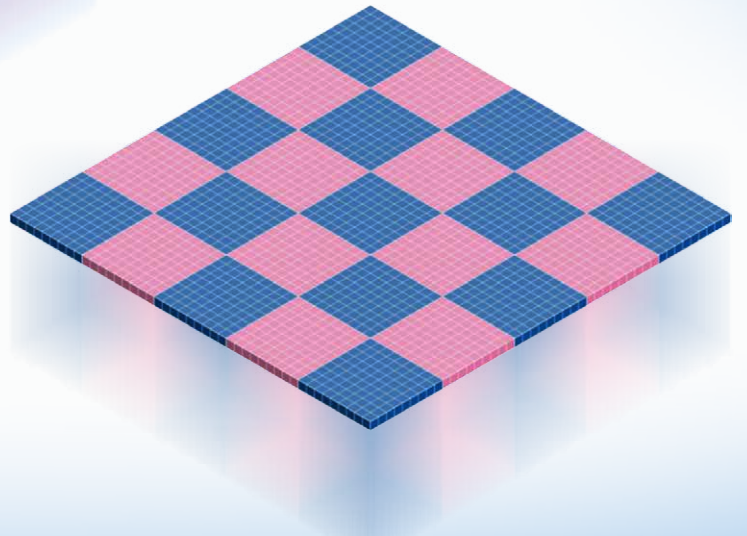
$$(1 + 3 + 5 + \dots + 89) = 2025$$

1 से 89 तक की विषम संख्याओं का योग = 2025



$$9^2 \times 5^2 = 2025$$

पच्चीस बार नौ का वर्ग 2025 होता है



साल 2025 की शुरुआत हुई इन व्हाट्सएप फॉरवर्ड मैसेजों के साथ कि 2025 को गणितीय समीकरणों में कितनी तरह से निरूपित किया जा सकता है। सम्पादक स्वाती सरकार ने एट राइट एंगल्स के पाठकों के लिए इन्हें दृश्य रूप में बदल दिया है! हम आशा करते हैं कि आपके विद्यार्थी ऐसे और रंग-बिरंगे चित्र बनाने के लिए प्रेरित होंगे और उनमें नए पैटर्न खोजेंगे!

सम्पादक की ओर से...

प्रिय पाठको,

पेश है साल 2025 का पहला अंक! हालाँकि अब यह इतना भी नया नहीं रह गया, साल के तीन महीने बीत चुके हैं। हम एक तिमाही का सफ़र तय कर चुके हैं। पुराने अंक से अब तक एक जाड़े के मौसम का फ़ासला भी तय हो चुका है।

मार्च, 2024 और नवम्बर, 2024 के अंकों के अन्तराल में पद्मप्रिया शिराली और मैंने कुछ दिन कर्नाटक के चामराजनगर ज़िले और मध्य प्रदेश के भोपाल व दमोह ज़िलों के ऐसे कुछ स्कूलों में बिताए जो अज़ीम प्रेमजी फ़ाउण्डेशन के सम्पर्क में हैं। एक बार फिर से कक्षाओं में जाना और शिक्षकों व विद्यार्थियों के साथ हमारे संवाद आनन्ददाई और विचारोत्तेजक रहे। हम ढेर सारे विचारों और बच्चों व उनके शिक्षकों की ऊर्जा व उत्साह की बुनियाद पर आगे बढ़ने का संकल्प लिए वापस लौटे। सम्पादक रुद्रेश और सन्दीप दिवाकर ने हमारी इन यात्राओं का संयोजन किया था। यह देखकर हमें बहुत प्रोत्साहन मिला कि शिक्षकों और विद्यार्थियों ने किस तरह कक्षा में फ़ाउण्डेशन की उपस्थिति को हाथों-हाथ लिया। हमने देखा कि हमारे रिसोर्स पर्सन फ़्रील्ड से कितनी गहराई से जुड़े हैं। हम आगे भी ऐसी यात्राएँ करना चाहेंगे।

आपको *एट राइट एंगल्स* के इस अंक में और आगे आने वाले अंकों में खूब सारे सवालों के खूब सारे जवाब, लेखों के लिए अलग-अलग विचार और ग़लत धारणाओं को दूर करने के लिए सुझाव देखने को मिलेंगे।

मार्च, 2024 के अंक में हमने कक्षा-1 और 2 की गणित की नई पाठ्यपुस्तकों की विशेषताओं पर चर्चा की थी। इस अंक की शुरुआत हमने इस पर एक नज़र डालते हुए की है कि इन पाठ्यपुस्तकों को पूरे देश की कक्षाओं में कैसे लिया गया है और उपयोग किया गया है। इसने शिक्षणशास्त्र को किस तरह प्रभावित किया है? इनकी विषयवस्तु बच्चों को सिखाने में कितनी आसान रही है? स्वागत योग्य बदलाव कौन-से हैं? कौन-सी बातें छूट रही हैं? शिक्षक सोनिया कुण्डू द्वारा दी गई विस्तृत जानकारी के साथ क्षमा चक्रवर्ती ने इस लेख को शिक्षकों के साथ हुए कई संवादों, कक्षा की रिपोर्टों और कर्नाटक से उत्तराखण्ड तक विभिन्न राज्यों में बड़ी मेहनत से किए गए सर्वेक्षण के फ़ीडबैक की बुनियाद पर लिखा है।

‘कक्षा में’ खण्ड में हम आपके लिए कक्षाओं से कई झलकियाँ लेकर आए हैं। राहुल सिंह राठौर और जागृति मेहरा द्वारा तैयार की गई पाठ-योजनाएँ और मार्गदर्शित चर्चाएँ वृत्तों और पैटर्न की गहरी अवधारणात्मक समझ बनाने की ओर ले जाती हैं। शोख मोहम्मद ज़ाहिद ऐसे गहरे सवाल गढ़ने की अपनी समझ को साझा करते हैं जो किसी विद्यार्थी की समझ और ग़लत समझ दोनों पर ध्यान देते हैं। इसके कई उदाहरण भी दिए गए हैं और साथ में इस बारे में कुछ दिशा-निर्देश भी हैं कि दूसरे विषयों में इन्हें कैसे सम्बोधित करना है। क्षमा मॉण्टेसरी सामग्री, उनकी विशेषताओं और सीखने के उद्देश्यों पर अपने लेखों की शृंखला की आखिरी प्रस्तुति कर रही हैं। इसमें मैथ स्पेस की लिंक दी गई है जहाँ हम यह सीख सकते हैं कि इन वस्तुओं के कम लागत वाले रूप कैसे बनाए जा सकते हैं।

संख्या पहिया और एक संशोधित UNO खेल! 'गणित का मज़ा' लेने के लिए आपको और क्या चाहिए! इन्हें पढ़ने और इनके साथ प्रयोग करने का आनन्द उठाइए। अगर आप इनके ऐसे रूप विकसित कर सकें जो खेल, अवलोकन, चर्चा और दस्तावेज़ीकरण के द्वारा और अधिक सीखने की ओर ले जाते हों, तो हमें इनकी तस्वीरें और विचार ज़रूर भेजें।

गणितीय दृष्टि से बच्चों की काल्पनिक कहानियाँ के बारे में मनीषा गोयल एक जापानी लेखक (ऐनो) की एक शृंखला का वर्णन कर रही हैं। इसे गणितीय विषयवस्तु के लिए टटोला जा सकता है। वे यह भी विस्तार से बता रही हैं कि उन्होंने अपनी कक्षाओं में यह कैसे किया था। 'समीक्षा' में ऐसे कई और विचार साझा किए गए हैं। मैं चाहूँगी कि आप इस कहानी को ऑनलाइन ज़रूर पढ़ें। इसके चित्र इतने समृद्ध हैं और उनमें से हर एक गिनती, स्थानीय मान, गणितीय संक्रियाएँ, बजट बनाने, नियोजन व कई और उपयोगी जीवन कौशलों को समझने में आपके विद्यार्थियों की मदद कर सकते हैं!

हम इस बार ऐसी वस्तुओं की एक तुलनात्मक समीक्षा भी कर रहे हैं जिन्हें संख्या ज्ञान शिक्षण के लिए उपयोग किया जाता है। इनकी विशेषताओं का उपयोग कब और कैसे करना है, इन सब बातों को मैथ स्पेस द्वारा व्यवस्थित ढंग से सूचीबद्ध किया गया है।

इस बार का पुलआउट चामराजनगर की रिसोर्स पर्सन सौम्या एन. से प्रेरित है। उन्होंने बच्चों को बीजगणित से परिचित कराने की योजनाओं के बारे में पद्मप्रिया से पूछा था। हम आशा करते हैं कि आपको उनके सवालों से लाभ मिलेगा। हम चाहते हैं कि आप सब भी अपने सवाल/ अनुरोध हमारे साथ साझा करें।

आपके फ़ीडबैक, सवालों, विचारों को AtRightAngles.editor@apu.edu.in पर भेजें। हमें आपकी बातें सुनना अच्छा लगेगा।

हार्दिक शुभकामनाएँ,

स्नेहा टाइटस

मुख्य सम्पादक, एट राइट एंगल्स

अनुवाद : भरत त्रिपाठी पुनरीक्षण : प्रतिका गुप्ता कॉपी एडिटर : अनुज उपाध्याय

मुख्य सम्पादक**स्नेहा टाइटस**

अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी,
सर्वे नम्बर 66, बुरुगुटे विलेज,
बिक्कनाहल्ली मेन रोड, सरजापुरा,
बेंगलूरु, कर्नाटक - 562 125
sneha.titus@apu.edu.in

सह-सम्पादक**मोहन आर.**

अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी,
सर्वे नम्बर 66, बुरुगुटे विलेज,
बिक्कनाहल्ली मेन रोड, सरजापुरा,
बेंगलूरु, कर्नाटक - 562 125
mohan.r@apu.edu.in

सम्पादकीय कार्यालय

पब्लिकेशन, अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी,
सर्वे नम्बर 66, बुरुगुटे विलेज, बिक्कनाहल्ली मेन रोड,
सरजापुरा, बेंगलूरु, कर्नाटक - 562 125
ई-मेल: publications@apu.edu.in
वेबसाइट: www.azimpremjiiuniversity.edu.in

सम्पादकीय समिति**अजय कुमार के.**

अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी, बेंगलूरु, कर्नाटक
ajaykumar.k@apu.edu.in

अर्धेन्दु शेखर दाश

अज़ीम प्रेमजी फ़ाउण्डेशन,
धमतरी, छत्तीसगढ़
arddhendu@azimpremjifoundation.org

अशोक प्रसाद

अज़ीम प्रेमजी फ़ाउण्डेशन,
गढ़वाल, उत्तराखण्ड
ashok.prasad@azimpremjifoundation.org

सुधीश वेंकटेश

मुख्य संचार अधिकारी एवं प्रबन्ध सम्पादक
अज़ीम प्रेमजी फ़ाउण्डेशन, बेंगलूरु, कर्नाटक
sudheesh.venkatesh@
azimpremjifoundation.org

प्रकाशन टीम

मीरा प्रभु, शाहनाज़ बेगम,
लोकराम वी.जी. तथा सम्बित महापात्रा

क्षमा चक्रवर्ती

सलाहकार,
अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी, बेंगलूरु, कर्नाटक
kshama.chakravarthy@
azimpremjifoundation.org

मोहम्मद उमर

अज़ीम प्रेमजी फ़ाउण्डेशन,
राजसमन्द, राजस्थान
mohammed.umar@
azimpremjifoundation.org

पद्मप्रिया शिराली

वैली स्कूल, केएफ़आई,
बेंगलूरु, कर्नाटक
padmapriya.shirali@gmail.com

अनुवाद अंक सम्पादक

मधुकर एस. पुट्टी (कन्नड़)
राजेश उत्साही (हिन्दी)

हिन्दी अनुवाद

एकलव्य फ़ाउण्डेशन
समन्वय : प्रतिका गुप्ता

रुद्रेश एस.

अज़ीम प्रेमजी फ़ाउण्डेशन,
कलबुर्गी, कर्नाटक
rudresh@azimpremjifoundation.org

सन्दीप दिवाकर

अज़ीम प्रेमजी फ़ाउण्डेशन,
भोपाल, मध्य प्रदेश
sandeep.diwakar@
azimpremjifoundation.org

स्वाती सरकार

अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी, बेंगलूरु, कर्नाटक
swati.sircar@apu.edu.in

डिज़ाइन

जिंक एंड ब्रोकोली
बेंगलूरु, कर्नाटक

हिन्दी अंक लेआउट एवं मुद्रक

आदर्श प्रा.लि., भोपाल, मध्य प्रदेश

एट राइट एंगल्स अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी का प्रकाशन है। इसका उद्देश्य शिक्षकों, शिक्षक-प्रशिक्षकों, विद्यार्थियों और गणित के प्रति रुचि रखने वाले लोगों तक पहुंचना है। यह अलग-अलग विचारों और दृष्टिकोणों की अभिव्यक्ति के लिए एक मंच प्रदान करता है तथा नए और सुविज्ञ दृष्टिकोण, विचारोत्तेजक नज़रिए और नवाचार की कहानियों को प्रोत्साहित करता है। कोशिश है कि यह पत्रिका 'अकादमिक' और 'पेशेवर' उन्मुख होने के बीच सन्तुलन बना सके।

एट राइट एंगल्स अंक 21, मार्च 2025 का यह हिन्दी अनुवाद मई, 2025 में प्रकाशित हुआ है।

नोट : इस अंक में व्यक्त किए गए सभी विचार और राय लेखकों के निजी हैं और अज़ीम प्रेमजी फ़ाउण्डेशन या अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी किसी भी रूप में इसके लिए उत्तरदायी नहीं है।

विशेष

- 1 कक्षा-1 व 2 की एनसीईआरटी की गणित की नई पाठ्यपुस्तकों की समीक्षा क्षमा चक्रवर्ती और सोनिया कुण्डू

कक्षा में

- 16 पेपर फोल्डिंग के माध्यम से वृत्त को समझना राहुल सिंह राठौर
- 21 सीखने के विविध उद्देश्यों के लिए प्रश्न तैयार करना शेख मोहम्मद जाहिद
- 26 पैटर्न की खोज : कक्षा-2 में संख्याओं से सीखना जागृति मेहरा
- 30 मॉण्टेसरी का तरीका : चुनिन्दा सामग्रियों का परिचय और उन्हें फिर से कैसे बनाया जाए (भाग 2) क्षमा चक्रवर्ती

गणित का मज़ा

- 34 चक्के में चक्का : संख्या पहियों के माध्यम से गणित राजकुमार कनोजिया
- 38 गणित के कार्ड : कक्षा में UNO के ज़रिए सीखना सुमित कुमार पाण्डे

समीक्षा

- 43 ऐनो के जादुई बीज : गणित की कक्षा में इस्तेमाल के नज़रिए से कहानी की समीक्षा मनीषा गोयल द्वारा समीक्षित
- 47 पूर्ण संख्याओं के लिए मैनिप्यूलेटिव्स सामग्री : कब और क्यों? मैथ स्पेस द्वारा समीक्षित

पुलआउट

- पैटर्न्स और पूर्व-बीजगणित
पद्मप्रिया शिराली



कक्षा-1 व 2 की एनसीईआरटी की गणित की नई पाठ्यपुस्तकों की समीक्षा

क्षमा चक्रवर्ती और सोनिया कुण्डू

यह लेख कक्षा-1 व 2 के लिए एनसीईआरटी की गणित की नई पाठ्यपुस्तकों को परखता है, और उनकी तुलना एनसीएफ-एफएस में पेश किए गए नज़रिए से करता है। लेख में कुछ शिक्षकों के अनुभव और प्रतिक्रियाएँ भी हैं जो उन्होंने लेखकों से साझा किए हैं। साथ ही, इन नई पाठ्यपुस्तकों के बारे में मध्य प्रदेश, उत्तराखण्ड, छत्तीसगढ़, महाराष्ट्र और कर्नाटक के लगभग 90 शिक्षकों से जो गहरी समझ हासिल हुई है, उसका सारांश यहाँ पेश किया गया है।

कक्षा-1 व 2 के लिए एनसीईआरटी की नई पाठ्यपुस्तकें अपने पिछले संस्करणों के मुकाबले ज़्यादा जीवन्त, सुघड़, सुव्यवस्थित और समग्र हैं। 'आमुख' और 'पुस्तक के बारे में' वाले हिस्से इन संशोधनों के पीछे के सन्दर्भ और उद्देश्यों को बखूबी समझाते हैं।

राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 के अन्तर्गत उल्लिखित सिद्धान्तों और उद्देश्यों, तंत्रिका विज्ञान एवं प्रारम्भिक बाल्यकाल शिक्षा सहित विभिन्न विषयों के अनुसन्धान, व्यावहारिक अनुभव व संचरित ज्ञान तथा राष्ट्र की आकांक्षाओं एवं लक्ष्यों के आधार पर, आधारभूत स्तर की राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (एनसीएफ-एफएस) का विकास किया गया जिसका विमोचन 20 अक्टूबर 2022 को किया गया था। तत्पश्चात एनसीएफ-एफएस के पाठ्यचर्या सम्बन्धी उपागम के अनुरूप पाठ्यपुस्तकों की संरचना की गई। ये पाठ्यपुस्तकें कक्षा में सीखने और परिवार तथा समुदाय में सार्थक अधिगम-संसाधनों के साथ सीखने को महत्त्व देते हुए बच्चों के व्यावहारिक जीवन से जुड़ने का प्रयास करती हैं।

– आनन्दमय गणित, 2023

पाठ्यपुस्तकों में कई तरह की विषयवस्तुएँ शामिल हैं। साथ ही, इनमें कई बातें सीधे तौर पर कहने के बजाए विभिन्न इशारों (या ज़रियों) से उभारी गई हैं। जैसे इनमें बड़ों, विशेष रूप से नानी-दादी, नाना-दादा, की अहमियत और अलग तरह से सक्षम लोगों को सबके साथ शामिल करना, प्रकृति के प्रति संवेदनशीलता, सामाजिक मुद्दों के बारे में जागरूकता, और साझा करने, जिज्ञासु होने तथा अवलोकन करने के हुनर जैसे मूल्यों को बहुत सूक्ष्म तरीके से बढ़ावा दिया गया है। एनसीएफ-एफएस में सीखने के लिए खेल-आधारित दृष्टिकोण को अपनाया गया है। इसको अमल में लाते हुए 'आनन्दमय गणित' (Joyful Mathematics) की कक्षा-1 व 2 की पाठ्यपुस्तकों में कक्षा के अन्दर और बाहर दोनों जगह की जाने वाली ऐसे कई गतिविधियाँ दी गई हैं, जो समग्र विकास के लिए अनुभव से सीखने के लक्ष्य को हासिल करने में मददगार हैं।

गणितीय अवधारणाओं को स्पष्ट, प्रासंगिक चित्रों के ज़रिए पेश किया गया है। ये चित्र समझ बनाने में मदद करते हैं, और बच्चों के दृश्यात्मक कौशल तथा पढ़ने के कौशल को भी बढ़ाते हैं। आगे लेख में पाठ्यपुस्तकों के सचित्र विशिष्ट उदाहरण दिए गए हैं। अध्यायों में, बच्चों के साथ मौखिक चर्चाओं को शामिल किया गया है जिससे उन्हें अपनी विचार प्रक्रियाओं को बोलकर व्यक्त करने के लिए बढ़ावा दिया जाए। इन किताबों को इस तरह से डिज़ाइन किया गया है कि ये पाठ्यपुस्तक के साथ-साथ कार्यपुस्तिकाओं (text-cum-workbooks) के रूप में काम आएँ, जिससे बच्चों को इन्हें पढ़ते वक़्त ही चित्र बनाने, रंग भरने और लिखने के मौक़े मिल पाएँ। हालाँकि, कुछ शिक्षकों का कहना है कि आमतौर पर किसी मानक कार्यपुस्तिका में सवालों को हल करने के लिए जो जगह दी जाती है, वह इन किताबों में कम है।

की-वर्ड : एनसीईआरटी पाठ्यपुस्तक; समीक्षा; सर्वे; नया संस्करण; साक्षात्कार; उपयोगकर्ता का अनुभव

“गतिविधियों को पूरा करने के लिए कोई जगह नहीं है। यह जगह या तो पाठ्यपुस्तक में दी जानी चाहिए, या अगर इससे किताब भारी/मोटी हो जाती है, तो एक अलग कार्यपुस्तिका होनी चाहिए जिसमें इससे जुड़े सवाल हों।”

– गरिमा भट्ट, अजीम प्रेमजी स्कूल, उधमसिंह नगर, उत्तराखण्ड

अभ्यास की मात्रा के बारे में जानने के लिए सर्वेक्षण किया गया। (सर्वेक्षण का सारांश लेख के आखिर में साझा किया गया है)। पाया गया कि सर्वेक्षण में भाग लेने वाले लगभग 13% शिक्षक अभ्यास की मात्रा कम करवाना चाहते हैं, जबकि 48% शिक्षक अभ्यास के सवालों को बढ़ाना चाहते हैं। कुछ शिक्षकों ने खास वजहों से ज्यादा अभ्यास की जरूरत का जिक्र किया।

“इस स्तर पर गणित के प्रक्रियात्मक पहलुओं का अभ्यास करने की अहमियत पर जोर देने की जरूरत है। पाठ्यपुस्तकों में सबसे पहले, अभ्यास को उसकी अहमियत के कारणों के साथ बताया जा सकता है, साथ ही शिक्षकों के लिए अपने विद्यार्थियों को अभ्यास करवाने के विशिष्ट सुझाव और संसाधन शामिल किए जा सकते हैं।

पाठ्यपुस्तकों में ‘तथ्यात्मक प्रवाह’ (Fact fluency) का भी जिक्र नहीं है। पाठ्यपुस्तक के आखिर में ‘जोड़ के तथ्य’ (addition facts) व ‘घटाव के तथ्य’ (subtraction facts) जैसी ‘तथ्य-शीट’ (Fact sheets) देने से विद्यार्थियों को तथ्यात्मक प्रवाह विकसित करने में मदद मिल सकती है, वरना वैचारिक समझ पर ज्यादा जोर देने की वजह से यह बात छूट सकती है।”

– अनघ, अजीम प्रेमजी स्कूल, बेंगलूरु, कर्नाटक

“अधिगम के अलग-अलग स्तरों वाले विविध विद्यार्थियों की कक्षा के लिए, अभ्यास के अलग-अलग स्तरों के सवाल होना अच्छा है। मैं पाठ्यपुस्तक की सीमाओं को समझती हूँ। वह सभी की माँगों को पूरा नहीं कर सकती है। फिर भी, अगर इसमें अलग-अलग स्तरों के लिए अभ्यास के ज्यादा सवाल शामिल हों तो यह बेहतर हो सकती है। हर गतिविधि/अवधारणा के लिए, एक विवरण, तस्वीरें और फिर ‘आओ, इसे करें’ वाला हिस्सा हो, जिसमें गतिविधि पर आधारित 3-4 सवाल शामिल हों, जिन्हें बढ़ाया जा सकता है। आमतौर पर बच्चों को नोटबुक या वर्कशीट में काम करने की तुलना में पाठ्यपुस्तक को हल करने में ज्यादा मजा आता है।”

– आकांक्षा, अजीम प्रेमजी स्कूल, बाड़मेर, राजस्थान

इन पाठ्यपुस्तकों में कई गतिविधियाँ हैं, जो सुझाव के तौर पर दी गई हैं। इसके पीछे विचार यह है कि शिक्षकों को प्रोत्साहित किया जाए कि वे अपनी खुद की गतिविधियाँ बनाएँ, और उनमें स्थानीय खिलौनों, खेलों या बच्चे के आस-पास के माहौल में पाई जाने वाली सामग्रियों का इस्तेमाल करें, जिससे बच्चों के लिए प्रत्यक्ष चीजों के साथ खुद करके सीखना सुलभ किया जा सके। शिक्षकों के पास अपने खास सन्दर्भ के मुताबिक गतिविधियों को ढालने, बदलने और तैयार करने की छूट होती है। बस, इसे इस तरह किया जाए कि इस स्तर पर बच्चों के लिए बताई गई खास योग्यताएँ विकसित करने पर शिक्षकों का ध्यान बना रहे। यह शिक्षक की अपनी क्षमता, उसके इरादे, संसाधनों की उपलब्धता और मार्गदर्शन जैसे कारकों पर निर्भर करता है कि वह अपने विद्यार्थियों के लिए किस हद तक शिक्षण का विश्व स्तरीय अनुभव बना सकता है, और जो एनसीएफ-एफएस दस्तावेज़ में पेश नज़रिए के साथ भी मेल रखता हो। हमारे सर्वे के अनुसार 80% शिक्षकों ने बताया कि उन्होंने अतिरिक्त गतिविधियाँ की हैं, जैसे कि टोकन और नकली रुपयों के साथ खरीदारी का अनुभव करवाना; ऊँगलियों, पत्थरों, कांडटों और पासों से गिनना; या भारी और हल्के की अवधारणा को गतिविधियों के ज़रिए खुद करके समझना। यकीनन, ये प्रयास सही दिशा में बढ़ाए गए क़दम हैं!

अब, अध्याय की संरचना पर एक नज़र डालते हैं। शिक्षकों को क्या करना चाहिए (चित्र-1), इस पर दोनों कक्षाओं की किताबों के प्रत्येक अध्याय में उचित निर्देश दिए गए हैं। इसके साथ ही विभिन्न विषयों पर बातचीत के लिए बिन्दु और चर्चा के मौक़े देने वाली बातें जैसे कि ट्रेन, झण्डे, जानवर, आपस में साझा करना, एकता दिवस, सन्तुलित आहार और जरूरत से ज्यादा खाने के बुरे असर आदि शामिल किए गए हैं।

यह खेल बच्चों के साथ कक्षा में खेलें। बच्चों को लंबाई एवं गोलाई के आधार पर दो-दो वस्तुओं के नाम बताने के लिए कहें। हर बार नई वस्तुओं का नाम लेना है, दोहराना नहीं है। बच्चे वस्तुओं के एक ही आयाम की ओर ध्यान देकर भी उनका वर्गीकरण कर सकते हैं। जैसे कोई गिलास को लंबा और कोई अन्य बच्चा उसे गोल कह सकता है। दोनों तरह के उत्तरों को तर्क के आधार पर सही माना जाए। बच्चों को अपने वर्गीकरण का तर्क देने के लिए कहें।



बच्चों को अभिनय के साथ कविता पाठ करने के लिए कहें। बच्चे चित्रों का अवलोकन करें और बताएं कि उन्होंने क्या देखा एवं चर्चा करें कि कौन-कौन सी वस्तु ऊपर है, कौन-सी नीचे इत्यादि छुपन-छुपाई के खेल में छिपने के स्थान व परिवेश के जानवरों के रहने के स्थान इत्यादि से संबंधित प्रश्नों के माध्यम से बच्चों को चर्चा में भागीदारी हेतु प्रोत्साहित करें।



गतिविधियाँ इस तरह कराई जाएँ कि सभी बच्चे गतिविधियों में किसी दिव्यांगता (यदि है) के बावजूद भी सक्रिय भागीदारी करें। उदाहरण के लिए, गेंद पर घुंघरू बांध सकते हैं एवं टोकरी के अंदर का तल बाहर के तल से अलग कर सकते हैं। इसका उद्देश्य यह है कि अलग उत्पन्न आवाज़ से गेंद के अंदर या बाहर गिरने का पता लगाया जा सके।



चित्र-1 : शिक्षकों के लिए निर्देश (कक्षा-1, अध्याय-2, पृष्ठ 10; कक्षा-1, अध्याय-1, पृष्ठ 2 व 4)

इन पाठ्यपुस्तकों में बच्चों की शब्दावली में बढोतरी करने, राष्ट्रीय एकीकरण को बढ़ावा देने और देशभक्ति को प्रोत्साहित करने के लिए गतिविधियाँ रची गई हैं (**चित्र-2**)। 'आओ सोचें' जैसे हिस्से बच्चे की समझ को जाँचने के काम आते हैं। वहीं, तरह-तरह के खेलों की युक्तियाँ (जैसे मौखिक निर्देशों के ज़रिए छिपी हुई चीज़ को ढूँढ़ना, या टोकरी में गेंद फेंकना) और कविताएँ (जिनके साथ समझ बनाने वाले सवाल होते हैं) सक्रिय भागीदारी को बढ़ावा देती हैं। एक गतिविधि में बच्चे रेलगाड़ी की तरह क्रतार बनाते हैं, फिर एक कविता को पढ़ते हुए दूसरों के सापेक्ष अपनी स्थिति की पहचान करते हैं (**चित्र-3**)।



चित्र-2 : राष्ट्रीय ध्वज के इर्द-गिर्द चर्चा (कक्षा-1, अध्याय-1, पृष्ठ 6)



चित्र-3 : रेलगाड़ी का खेल (कक्षा-1, अध्याय-1, पृष्ठ 8)

नई पाठ्यपुस्तकों में एक और खास तत्व प्रोजेक्ट कार्य है, जो विद्यार्थियों को रचनात्मक और व्यावहारिक तरीकों से गणितीय अवधारणाओं को अमल में लाने के मौक़े देता है। यह गणित को रोज़मर्रा की ज़िन्दगी से जोड़कर अनुभवजन्य शिक्षा को बढ़ावा देता है, टीमवर्क को प्रोत्साहित करता है, और समालोचनात्मक सोच तथा समस्या-समाधान के कौशल विकसित करता है।

अध्यायों की समाप्ति किसी प्रोजेक्ट या वास्तविक दुनिया की समस्या का समाधान करने वाली गतिविधि के साथ होती है, जैसे कि घर पर चीज़ों को मापना, संख्याओं के पैटर्न बनाना, या मात्राओं को मापना इत्यादि।

– सोनिया कुण्डू, अज़ीम प्रेमजी स्कूल, उत्तरकाशी, उत्तराखण्ड

प्रोजेक्ट कार्य (जैसे कि खरीदारी के लिए सामानों की सूची बनाना और खरीदारी करते वक़्त उनकी कीमत नोट करना) (चित्र-4क) के साथ-साथ, अध्यायों में मज़ेदार गतिविधियाँ (जैसे संख्या 3 या 4 को उँगलियों के ज़रिए अलग-अलग तरीकों से दिखाना) (चित्र-4ख), और अलग-अलग संस्कृतियों और जगहों (जैसे कि कश्मीर में डल झील, कर्नाटक के छाया खेल, गुजरात का गरबा और केरल की सर्प-नौका स्पर्धा) का परिचय शामिल है (चित्र-4ग)।

<p>परियोजना कार्य</p> <p>जब आप माता-पिता के साथ बाज़ार जाएँ, तो खरीदी गई वस्तुओं की सूची बनाइए एवं खर्च किए गए पैसे का हिसाब लगाइए।</p> <p>चित्र-4क : कक्षा-2, अध्याय-10, पृष्ठ 122</p>	<p>वल्लमकली</p> <p>ओणम केरल में मनाया जाने वाला प्रसिद्ध त्यौहार है, जिसमें नौका-दौड़ होती है, जिसे वल्लमकली कहते हैं। दौड़ समाप्त होने वाली है। चित्र को देखिए एवं प्रत्येक नाव की स्थिति बताइए।</p> 
<p>आओ खेलें— उँगलियों का जादू</p> <p>अपने मित्र को कोई भी 3 उँगली दिखाइए। आपके मित्र को भी अपनी कोई 3 उँगलियाँ किसी अलग तरीके से दिखानी हैं, जैसे— 2 उँगली एक हाथ की एवं 1 उँगली दूसरे हाथ की। इसी प्रकार यह खेल अन्य संख्याओं के लिए भी खेला जा सकता है। दो हाथों से 4 उँगलियाँ कितने प्रकार से दिखाई जा सकती हैं?</p>  <p>चित्र-4ख : कक्षा-1, अध्याय-3, पृष्ठ 21</p>	<p>चित्र-4ग : कक्षा-2, अध्याय-1, पृष्ठ 14</p>

हर एक अध्याय की शुरुआत में सबसे ऊपर स्कैन करने के लिए 'क्यूआर कोड' (QR code) दिया हुआ है। इसके ज़रिए शिक्षक अध्याय में दिए गए विषयों से जुड़े ऑडियो, वीडियो, मल्टीमीडिया, लिखित पाठ्य आदि ई-संसाधनों तक आसानी से पहुँच सकते हैं। उदाहरण के लिए, कक्षा-1 के अध्याय-2 ('क्या लम्बा है? क्या छोटा है?') में जो क्यूआर कोड दिया गया है, वह ऑडियो संसाधन तक ले जाता है जहाँ पूरे अध्याय को पढ़कर सुनाया गया है, और वीडियो संसाधन पर भी ले जाता है जिसमें कार्टून के रूप में 'समझदार दादी' की कहानी है; उसके बाद अध्याय में शामिल बातों से जुड़े सवाल और अभ्यास हैं, जो इंटरैक्टिव ढंग से दिए गए हैं।



**क्या है लंबा?
क्या है गोल?**

समझदार दादी

एक बार एक मेमना था। वो अपनी दादी से मिलने जा रहा था।
एक भेड़िये ने मेमने को देखा। वह उसे खाना चाहता था।
पाठ्यपुस्तक में दी हुई कहानी

एनसीईआरटी कक्षा-1 गणित अध्याय समझदार दादी एपी-2

चित्र-5 : कक्षा-1, अध्याय-2, पृष्ठ 10 और 14

सर्वे में शामिल 60% शिक्षकों ने दावा किया कि उन्होंने इस डिजिटल सामग्री का इस्तेमाल किया है। शिक्षकों ने बताया कि इसमें दी हुई गतिविधियाँ और ऑडियो संसाधन फ़ायदेमन्द हैं और सीखने-सिखाने को आसान बनाते हैं। अतिरिक्त संसाधन उन्हें सही ढंग से समझाने का आत्मविश्वास देते हैं। हालाँकि, कुछ शिक्षकों ने यह भी बताया कि स्कूल में फ़ोन/इंटरनेट की अनुमति नहीं है और इसलिए वे स्कूल में रहते हुए इस सुविधा का इस्तेमाल नहीं कर पाते हैं।

पाठ्यपुस्तकों के बारे में, उनको अमल में लाने पर और विद्यार्थियों के साथ उनके अनुभव को लेकर शिक्षकों के नज़रिए को जानने के लिए कुछ शिक्षकों का साक्षात्कार किया गया। हम इसे आपके लिए व्हाट्सएप चैट, टेलीफोन पर साक्षात्कार और बातचीत की दस्तावेज़ी रिपोर्ट के रूप में यहाँ पेश कर रहे हैं।

गरिमा भट्ट के साथ क्षमा चक्रवर्ती की व्हाट्सएप चैट।

गरिमा अज़ीम प्रेमजी स्कूल, उधमसिंह नगर, उत्तराखण्ड में कक्षा-2 से 5 तक की शिक्षिका हैं।

G गरिमा, शिक्षिका अज़ीम प्रेमजी स्कूल

नई किताब की खास बातें क्या हैं?

K

G वास्तविक ज़िन्दगी से जुड़ी बातें, कहानियाँ और तस्वीरें बच्चों को बहुत पसन्द आती हैं!

क्या आप हमें इसके कुछ उदाहरण बता सकती हैं?

K

G यहाँ गरबा नृत्य का एक उदाहरण है। बच्चे इसको जानते हैं और इसका मज़ा भी लेते हैं।



चित्र-6 : कक्षा-2, अध्याय-2, पृष्ठ 16

Write your message...



G गरिमा, शिक्षिका अजीम प्रेमजी स्कूल

G पहले अध्याय में सीप से बनी माला बच्चों के लिए दिलचस्प है। तराजू पर लड्डू या किसी और सामान को तौलना कुछ ऐसा है जिसे बच्चे बखूबी समझते हैं क्योंकि उन्होंने सब्जी-बाजार में ऐसा होता देखा है या उनके परिवार के लोग अगर ऐसे सामान बेचते हैं तो उनके पास भी ऐसे तराजू हो सकते हैं। जो अध्याय 'समय' के बारे में है, उसमें एक अच्छी चित्रकथा है।

चित्र देखिए एवं पता कीजिए कि ये सभी किस प्रकार विभिन्न वस्तुओं को तोल रहे हैं।



चित्र-7 : कक्षा-2, अध्याय-7, पृष्ठ 79



चित्र-8 : कक्षा-2, अध्याय-9, पृष्ठ 104

धन्यवाद! क्या आपके पास इन पाठ्यपुस्तकों में सुधार के लिए कोई सुझाव हैं? K

G जी। कक्षा-2 की किताबों में अध्यायों के क्रम को बदला जा सकता है। अभी अध्याय-1 संख्याओं पर है, अध्याय-2 3डी आकृतियों पर, अध्याय-3 फिर से संख्याओं पर, अध्याय-4 2डी आकृतियों पर और फिर रेखाओं पर बात की गई है। बेहतर होगा अगर पहले संख्याओं को पूरा किया जाए, फिर 3डी आकृतियों पर बात हो और फिर 2डी को समझाया जाए।

क्या आपको लगता है कि अभी जो क्रम है वह किसी खास वजह से दिया गया है? K

G यह हो सकता है कि अभी जो क्रम दिया गया है, वह एकरसता को दूर करने और ऐसे बच्चों की मदद करने के लिए हो, जिन्हें संख्याएँ भारी लगती हैं। मगर खुद मेरी राय में यह बेहतर होगा कि बच्चों ने अब तक जो सीखा है उस पर काम करते हुए संख्याओं की समझ को पूरा करें, और उसके बाद ही किसी और टॉपिक पर जाएँ।

ठीक है। आखिर में कोई और बात जो आप जोड़ना चाहेंगी? K

G कुल मिलाकर यह वाकई बहुत अच्छी किताब है और बेहतरीन कोशिश है!

Write your message...



पूनम से क्षमा चक्रवर्ती की फ़ोन पर बातचीत ।

पूनम अज़ीम प्रेमजी स्कूल, उधमसिंह नगर, उत्तराखण्ड में कक्षा-1 और 2 को पढ़ाती हैं।

इस नई किताब में आपको और बच्चों को क्या पसन्द आया?



क्षमा



पूनम

मुझे चित्र, उदाहरण, कहानियाँ, प्रोजेक्ट कार्य, गतिविधियाँ और गतिविधि के बारे में सुझाव बहुत पसन्द आए। दोनों कक्षाओं के विद्यार्थियों के बीच 'पहेलियाँ' बहुत पसन्द की जाती हैं! इस नए संस्करण में वास्तविक ज़िन्दगी की मिसाल और टीएलएम का अच्छा मेल किया गया है।

क्या आप उन गतिविधियों के कुछ उदाहरण बता सकती हैं जिनमें बच्चों को मज़ा आया हो?



पूनम

अनुमानित लम्बाई बनाम वास्तविक लम्बाई एक ऐसी गतिविधि है जिसे बच्चे खूब पसन्द करते हैं। उन्हें कक्षा-1 की पाठ्यपुस्तक के अध्याय-7 में पेज 79 पर तालिका भरने में मज़ा आया। उन्होंने जो दूरियाँ सुझाई थीं, उनको मापने पर उनके ही अनुमानों की तुलना उनके ही वास्तविक निष्कर्षों से करना बड़ा मज़ेदार था।



पूनम

कक्षा-1 में, अध्याय-7 के पेज 82 पर 'हमारे लिए पानी बहुत उपयोगी है' दिया गया है। इसमें हम पानी के इस्तेमाल पर चर्चा करते हैं। उदाहरण के लिए, मंजन (ब्रश) करने में कितना पानी चाहिए? एक बाल्टी भरने के लिए कितने जग पानी की ज़रूरत होती है? यदि जग की जगह गिलास से भरेंगे तो ज़्यादा की ज़रूरत होगी – यह ऐसी बात है जिसे बच्चे गतिविधि करते वक़्त आसानी से बता पाते हैं।



पूनम

कक्षा-2 में, अध्याय-5 'रेखाओं से खेल' पर है। इसमें आसन की मुद्राओं का परिचय बहुत दिलचस्प है।

क्या आप सुधार के लिए कोई सुझाव देना चाहेंगी?



भाषा को सरल बनाया जाना चाहिए और लिखित शब्दों का कम इस्तेमाल किया जाना चाहिए। शिक्षक की मदद के बिना कक्षा-2 में सभी टॉपिक को पूरा नहीं किया जा सकता है। यह विद्यार्थियों की कार्यपुस्तिका से ज्यादा शिक्षक के लिए एक साधन है। कुछ टॉपिक में अभ्यास के लिए सवाल उतने नहीं हैं, जितने होने चाहिए (कक्षा-2 में 'मापन' इसका एक उदाहरण है)। इसके अलावा, अध्यायों के क्रम में, आकृतियों और पैटर्न से शुरू करें और फिर गिनती और बण्डलिंग पर जाएँ।

शुक्रिया।



यहाँ एक और शिक्षिका के विचार पेश हैं, जिन्होंने सर्वे में भाषा की कठिनाई के बारे में बात की थी :

“गणित पढ़ाने के भाषाई पहलुओं को ऐसी खास शब्दावली, वाक्यांश और वाक्यों की रचना देकर सुधारा जा सकता है, जिससे विद्यार्थियों को लगातार उनका अभ्यास करने में मदद मिल पाए। ऐसे कई शब्द हैं जो भारत में सब जगह समझ में नहीं आते हैं (दीया, नीम्बू पानी, बिन्दी); खासकर पाठ्यपुस्तक के अंग्रेजी संस्करण में इनसे बचा जा सकता है।”

– अनघ, अजीम प्रेमजी स्कूल, बेंगलूरु, कर्नाटक

भारती जी.एस. और एन. पुष्पलता के साथ क्षमा चक्रवर्ती की बातचीत।

दोनों शिक्षिकाएँ कर्नाटक पब्लिक स्कूल, सरक्की, बेंगलूरु में कक्षा-1 व 2 पढ़ाती हैं।

क्षमा चक्रवर्ती : पाठ्यपुस्तकों के नए संस्करण के बारे में आप क्या सोचती हैं?

भारती : इस नए संस्करण को बनाने में जो काम किया गया है, उसकी हम तारीफ़ करते हैं। इसके साथ ही यह बात भी है कि कर्नाटक के सरकारी स्कूलों के मद्देनजर शिक्षकों के लिए इन पाठ्यपुस्तकों के इस्तेमाल में बहुत मुश्किल आती है। ऐसा इसलिए क्योंकि यहाँ ज्यादातर छात्र-छात्राएँ जब पहली कक्षा में आते हैं, तो उन्हें भाषा या पढ़ाई-लिखाई का पहले से कोई अनुभव नहीं होता है। शिक्षकों को आमतौर से कहीं ज्यादा काम करना पड़ता है और विद्यार्थियों को क्रम-क्रम पर बहुत मदद की ज़रूरत पड़ती है।

क्षमा : अच्छा, तो क्या भाषा और शब्दावली कठिन है?

पुष्पलता : हाँ, लिखा हुआ पाठ्य बहुत कम होना चाहिए और, जहाँ भी सम्भव हो, चित्र ऐसे हों कि उन्हें देखकर बात खुद-ब-खुद समझ में आ जाए।

क्षमा : ठीक है। जिस तरह से टॉपिक लिए गए हैं, उसके बारे में आप क्या सोचती हैं?

भारती : उनमें जिस तरह से अवधारणाओं से परिचय कराया गया है और सिखाया गया है वह बहुत बढ़िया है। इस तरीके में बच्चे बिना यह महसूस किए कि उन्हें सिखाया जा रहा है बहुत कुछ सीख लेते हैं।

क्षमा : क्या आप इसे ज़रा विस्तार से समझाएँगी?

भारती : इसका मतलब यह है कि अवधारणाओं को उदाहरणों, कहानियों, टीएलएम आदि के ज़रिए पढ़ाया जाता है, जिससे विद्यार्थियों पर यह बात हावी न हो कि वे कुछ नया या मुश्किल सीख रहे हैं, और वे इसी में अटककर न रह जाएँ। जैसे दहाई और इकाई में समूह बनाने को अलग-अलग तरीकों से पेश किया गया है।

क्षमा : क्या आपकी नज़र में कोई ऐसी बात आई है जिस पर ध्यान देने की ज़रूरत है?

पुष्पलता : पाठ्यपुस्तक में एक ऐसी ग़लती है जिसे ठीक करने की ज़रूरत है। यहाँ दी गई तस्वीर देखें (चित्र-10 देखें)। आप पाएँगे कि तीसरी पंक्ति में जो दर्ज किया गया है उसके आधार पर चौथी पंक्ति उन संख्याओं से नहीं भरी जा सकती है जो किताब में छपी गई हैं।

पुष्पलता : इसके साथ ही, सरकारी स्कूलों को द्विभाषी किताबों (अंग्रेज़ी और कन्नड़) का इस्तेमाल करना है, और सवाल दोनों भाषाओं में दिखाई देते हैं, जिन पर काम या जिनका हल दो बार दिया जाना है। इसमें समय लगता है और विद्यार्थी परेशान होते हैं। हमारा सुझाव है कि सवाल दोनों भाषाओं में पूछें और जवाब के लिए एक ही उत्तर का खाना या कार्य के चरण दें। (चित्र-11 देखें)

अ. गिनिए और लिखिए



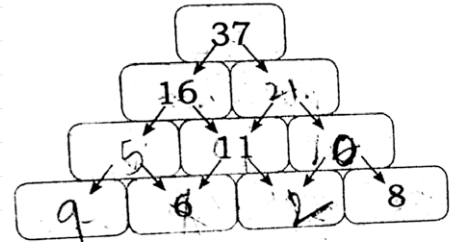
ब. दी गई संख्या के अनुसार दस के फ्रेम में रंग भरिए।

14

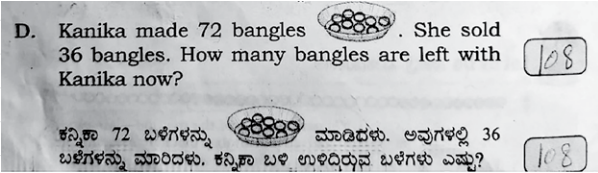
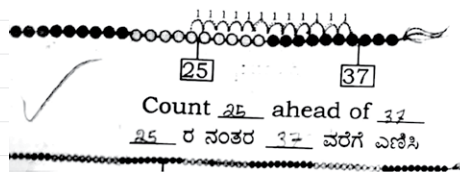
19

16

चित्र-9 : कक्षा-1, अध्याय-4, पृष्ठ 44



चित्र-10 : कक्षा-2, अध्याय-6, पृष्ठ 90



चित्र-11 : कक्षा-2 की द्विभाषी किताब, अध्याय-6, पृष्ठ क्रमशः 70 और 88

क्षमा : क्यों न शिक्षक ही विद्यार्थियों से सिर्फ़ एक बार उत्तर देने के लिए कहें?

पुष्पलता : हम कोशिश करते हैं 😊 मगर उन्हें खाली खाना छोड़ना अच्छा नहीं लगता है इसलिए वे सभी में जवाब लिख देते हैं। इससे कक्षा में वक्रत बर्बाद होता है। किताब में बदलाव करने से यह काम आसान हो जाएगा।

नोट : द्विभाषी पाठ्यपुस्तकों का मुद्दा एनसीईआरटी के अधिकार-क्षेत्र में नहीं बल्कि राज्य के अधिकार-क्षेत्र में आता है। इस संवाद को सहेजने के मक़सद से इसे यहाँ बनाए रखा गया है।

विभिन्न शिक्षकों के अनुभवों के अंश पढ़ने के बाद, आइए अब वह विस्तृत रिपोर्ट देखें जो अज़ीम प्रेमजी स्कूल, उत्तराखण्ड की शिक्षिका सुश्री सोनिया कुण्ड ने हमसे साझा की।

नई पाठ्यपुस्तक के सकारात्मक पहलू (कक्षा-1)

नई गणित पाठ्यपुस्तकों की मुख्य विशेषताएँ

फिर से बनाई गई पाठ्यपुस्तक का मकसद नए तौर-तरीकों, इंटरैक्टिव साधनों और वास्तविक दुनिया में लागू हो सकने वाली बातों का मेल करके विद्यार्थियों को सीखने का ऐसा अनुभव देना है, जो दिलचस्प हो और समग्र हो। नई किताब की ये विशेषताएँ जिज्ञासा को प्रोत्साहित करती हैं, सक्रिय रूप से सीखने को बढ़ावा देती हैं और गणितीय अवधारणाओं की गहरी समझ विकसित करती हैं। इस नए संस्करण में मुझे जो बातें सबसे अलग लगीं, वे यहाँ दी गई हैं।

1. अवधारणा का परिचय

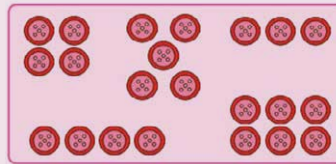
अवधारणाओं को आसान तरीकों से पेश किया गया है। बच्चे के लिए इन्हें समझना आसान हो इसलिए तस्वीरों और खेलों के ज़रिए बात कही गई है। यहाँ कुछ उदाहरण दिए गए हैं।

सहज ज्ञान से फ़ौरन गणना (Perceptual subitizing) : ऐसी गणना सहज ही होती है। हम चीज़ों के किसी छोटे समूह को देखते ही बिना गिने फ़ौरन जान सकते हैं कि उस समूह में कितनी चीज़ें हैं। यह बुनियादी अवधारणा है कि संख्याएँ दहाई और इकाई से बनी होती हैं और इसे समझ जाने से बड़ी संख्याओं को समझने की राह बनती है। 'स्थानीय मान' की समझ विकसित करने और दिमागी गणनाएँ करने के लिए समूह के रूप में 'दहाई' को समझना ज़रूरी है। पाठ्यपुस्तक में इसे अच्छी तरह से बताया गया है।



चित्र-12 : विद्यार्थी 'दस के फ्रेम' का इस्तेमाल करके संख्या-बन्ध (number bonds) या संख्याओं के जोड़े (number pairs) बना रहे हैं।

ख. आइए कुछ वस्तुओं, जैसे इमली के बीज, बटन, कंकड़, बिन्दी इत्यादि से कुछ डिज़ाइन बनाएँ एवं प्रत्येक डिज़ाइन में बिन्दुओं की संख्या बताइए।



चित्र-13 : कक्षा-1, अध्याय-4, पृष्ठ 33

अवधारणात्मक रूप से फ़ौरन गणना (Conceptual subitizing) : इसमें यह पहचानना होता है कि कैसे चीज़ों का एक समुच्चय दरअसल कई छोटे समूहों से मिलकर बना है। मिसाल के तौर पर पासे को लें : हमें जब 6 दिखाई देता है, तो हम इसे तीन के दो समूहों के रूप में देख सकते हैं, जिसे हम छह होना समझते हैं।

संख्याओं को कई तरीकों से देखा जा सकता है और उनके तरह-तरह से समूह बनाए जा सकते हैं। उदाहरण के लिए, संख्या 8 को 3 व 5 के मेल, या 4 व 4 के रूप में देखा जा सकता है। 'अवधारणात्मक रूप से फ़ौरन गणना' में कुशलता हासिल करना ज़रूरी है क्योंकि यह कौशल कई अन्य गणितीय अवधारणाओं की बुनियाद रखता है, जिनमें संख्याओं का संयोजन व विघटन (composing and decomposing numbers), संख्याओं के बीच सम्बन्ध आदि शामिल हैं।

दस के फ्रेम का इस्तेमाल (Use of Tens Frames) : दस के फ्रेम (टेन फ्रेम) आसान मगर असरदार साधन हैं, जो विद्यार्थियों को संख्याओं की कल्पना करने और उनके स्थानीय मान को समझने में मदद करते हैं।

यह पाठ्यपुस्तकें समूहीकरण, जोड़, घटा और संख्या के पैटर्न की पहचान करने जैसी गतिविधियों के लिए दस के फ्रेम का इस्तेमाल करती हैं, और इस तरह वे संख्याओं को दशानि का व्यवस्थित तरीका मुहैया करवाती हैं। दस के फ्रेम विद्यार्थियों को यह दिखाते हैं कि कैसे संख्याओं के दहाई और इकाई के समूह बनाए जा सकते हैं, और इस तरह ये फ्रेम विद्यार्थियों को स्थानीय मान को समझने के लिए तैयार करते हैं। मिसाल के तौर पर, '13' को एक पूर्ण दस के फ्रेम (10) और तीन अतिरिक्त कांडटों के रूप में देखने से '1 दहाई और 3 इकाई' का ख्याल बनता है। इस तरह से, इसके ज़रिए स्थानीय मान और संख्या बोध की गहरी समझ को बढ़ावा मिलता है। यह आसान दिमागी गणनाओं के लिए समूह बनाने और 'दहाइयाँ बनाने' को प्रोत्साहित करता है (चित्र-9 व 12)।

2. बच्चों को अचरज में डालने वाले दिलचस्प तथ्य

विज्ञाना जगाने और सीखने को खुशनुमा बनाने के लिए पाठ्यपुस्तकों में ऐसे दिलचस्प और अचरज में डालने वाले तथ्य शामिल किए गए हैं, जो गणित और वास्तविक दुनिया के बीच रिश्ता बताते हैं।

पाठ्यपुस्तकों में शामिल उदाहरण : सूर्य मन्दिर, दुनिया की सबसे ऊँची प्रतिमा आदि के बारे में चर्चा।

इसे भी जानिए

यह सरदार वल्लभभाई पटेल की प्रतिमा है, जिसे 'स्टैच्यू ऑफ यूनिटी' या 'एकता की मूर्ति' भी कहा जाता है। यह विश्व की सबसे ऊँची प्रतिमा है और यह गुजरात में स्थित है।



चित्र-14 : कक्षा-1, अध्याय-7, पृष्ठ 74

3. चित्रात्मक इंटरैक्टिव अभिव्यक्तियाँ

दृश्यात्मक साधन और चित्रात्मक प्रस्तुतियाँ अमूर्त अवधारणाओं को सरल रूप में प्रस्तुत करती हैं जो इन अवधारणाओं को तुलनात्मक रूप से अधिक मूर्त रूप में और खुद से जुड़ाव के साथ समझने में मददगार हैं। इसके उदाहरणों में सममिति, आकार और माप जैसी अवधारणाओं के लिए रंगीन चित्र, आरेख और इन्फोग्राफिक्स; शाब्दिक प्रश्नों और विवेक-बुद्धि के प्रश्नों के लिए कॉमिक-शैली की व्याख्याएँ शामिल हैं।

4. सुझाने वाली गतिविधियों को शामिल करना

सक्रिय भागीदारी को प्रोत्साहित करने और कोशिश व गलतियाँ करते हुए सीखने के मौक़े मुहैया करने के लिए पूरे अध्याय में इंटरैक्टिव हैंड्स-ऑन गतिविधियों को सोच-समझकर शामिल किया गया है।

पाठ्यपुस्तकों से लिए गए उदाहरण

- जोड़ या घटाव के खेल के लिए पासे का इस्तेमाल करना
- मनकों या डण्डियों जैसी चीज़ों से गिनती करना और समूह बनाना
- संख्या रेखाएँ खींचना और इन पर आधारित पर पहेलियाँ हल करना

5. अवधारणाओं का प्रवाह बखूबी डिज़ाइन किया गया है

नई पाठ्यपुस्तकों में अवधारणाओं को तार्किक ढंग से जमाया गया है। इसमें विभिन्न टॉपिक को आसान से उन्नत/जटिल तक धीरे-धीरे पेश किया गया है। अध्याय आपस में जुड़े हुए हैं, जिससे विद्यार्थी पिछले अध्याय में सीखे हुए विचारों का आधार लेकर आगे सीख सकते हैं और अलग-अलग गणितीय अवधारणाओं के बीच के रिश्ते को देख सकते हैं, जिससे उनमें ज़्यादा गहरी और समग्र समझ विकसित होती है।

- अवधारणाओं को बढ़ते क्रम में पेश करने से संज्ञानात्मक बोझ महसूस नहीं होता है।
- नए कौशलों को बनाने के साथ ही इससे पहले हासिल ज्ञान को मज़बूती मिलती है।

6. तार्किक सवाल

पाठ्यपुस्तकों में तर्क (विवेक-बुद्धि) पर आधारित सवालों को शामिल किया गया है, जो विद्यार्थियों को समालोचनात्मक रूप से सोचने और अपने जवाबों के तर्क देने के लिए प्रोत्साहित करते हैं।

- तार्किक विवेक-बुद्धि और विश्लेषणात्मक सोच बढ़ती है।
- रटने के बजाय गहरी अवधारणात्मक समझ बनती है।

प. आओ, गेंदों से खेलें।



- अ. ऐसी तीन गेंद चुनिए जिनका योग 15 हो।
 ब. ऐसी तीन गेंद चुनिए जिनका प्राप्तांक (स्कोर) सबसे अधिक हो।
 स. ऐसी तीन गेंद चुनिए जिनका प्राप्तांक (स्कोर) सबसे कम हो।

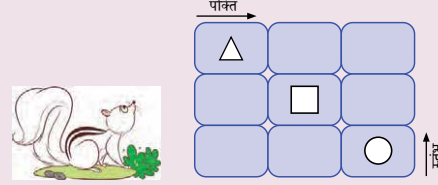
चित्र-15 : कक्षा-1, अध्याय-13, पृष्ठ 128

7. सीखने-सिखाने को बढ़ावा देने वाले खेल

गणित पर आधारित खेल, गणित को मज़ेदार बनाते हैं और गणित विषय के बारे में किसी तरह के डर या फ़िक्र को कम करने में मदद करते हैं। ऐसे खेल विद्यार्थियों को अपने सहपाठियों के साथ संवाद और काम करने के लिए भी बढ़ावा देते हैं, जिससे सीखने-सिखाने का साझा अनुभव बनता है। इससे आत्मविश्वास बनता है और विद्यार्थियों में विषय की सबसे खास बातों की समझ मज़बूत होती है। अंकगणित के अभ्यास के लिए बोर्ड गेम, समालोचनात्मक सोच-विचार के लिए पहेलियाँ, सहयोग को बढ़ावा देने के लिए समूह में आपसी संवाद और व्यवहार वाले खेल इसके कुछ उदाहरण हैं।

विशिष्ट उदाहरण

छ. \triangle , \square और \circ को इन खानों में इस तरह बनाइए कि कोई भी आकृति प्रत्येक पंक्ति (आड़े में) और प्रत्येक स्तंभ में (खड़े में) केवल एक बार ही हो।



चित्र-16 : कक्षा-1, अध्याय-13, पृष्ठ 124

पाठ्यपुस्तक पर आधारित गतिविधियाँ

पाठ्यपुस्तक का यह पृष्ठ जोड़ और घटाव का परिचय करवाने के लिए मनकों और संख्या पट्टियों जैसे दृश्यात्मक साधनों का इस्तेमाल करता है, जिससे ये अवधारणाएँ बच्चों को दिलचस्प लगें और वे इनके साथ जुड़ाव महसूस कर पाएँ। मनकों से आगे गिनते हुए जोड़ को दिखाया गया है, जहाँ बच्चे 'गिनलड़ी' पर मनकों को जोड़कर योग होता हुआ देख सकते हैं (जैसे $13+4 = 17$)। इसी तरह, एक संख्या पट्टी पर पीछे की ओर कूदते हुए घटाव को दिखाया गया है, जो यह बताता है कि कैसे क्रम पीछे लेने से संख्याएँ घटती जाती हैं (जैसे $9-3 = 6$)। ये गतिविधियाँ खुद करते हुए समझ बनाने वाले तरीकों से विद्यार्थियों में अनुक्रमिक गिनती, जोड़ और घटाव की अवधारणाओं को पक्का करती हैं, और साथ-ही-साथ मूर्त बातों की समझ से अमूर्त बातों की समझ की ओर ले जाती हैं।

दिखाइए कि आप इसे कैसे गिनेंगे?

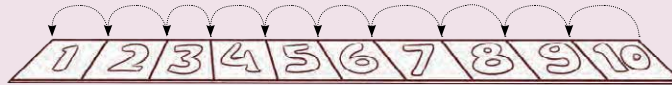
$13 + 4 =$

$14 + 5 =$

$6 + 8 =$

$5 + 7 =$

संख्या पट्टी पर पीछे की ओर कूदें।

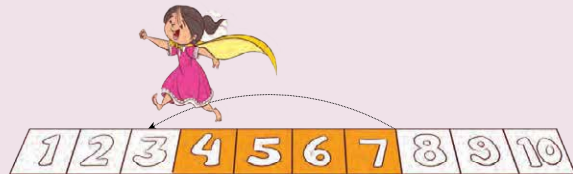


क. संख्या पट्टी पर 9 से 3 कदम पीछे कूदिए।



$$9 - 3 = 6$$

ख. संख्या पट्टी पर 7 से 4 कदम पीछे कूदिए।



चित्र-17 : कक्षा-1, अध्याय-6, पृष्ठ 66-67 और अध्याय-5, पृष्ठ 63

सुधार के लिए सुझाव

मौजूदा मुद्दा

निर्देशों में ऐसी स्थितियों के लिए स्पष्टता की कमी है जहाँ पासा फेंकने पर जो संख्या आती है, उससे जुड़े सभी खानों में पहले से ही रंग भरे हुए हों।



आओ खेलें

मित्र के साथ खेलिए। पासा फेंकिए और उन खानों में रंग भरिए जिनमें उतने ही बिन्दु हैं जितने आपके पासे पर आए हैं।

चित्र-18 : कक्षा-1, अध्याय-4, पेज 34

यहाँ दी गई तस्वीर में सीमित स्थान की वजह से रेखाएँ एक-दूसरी पर आ जाती हैं, जिससे अवधारणा को समझना मुश्किल हो जाता है।



आइए यह पता करने में बच्चों की सहायता करें कि उनके पास सामान पर्याप्त है या नहीं।

बच्चों की संख्या से कम या अधिक या के बराबर पर सही का चिह्न लगाइए।

वस्तुएँ	बच्चों की संख्या से अधिक	बच्चों की संख्या से कम	बच्चों की संख्या के बराबर

चित्र-19 : कक्षा-1, अध्याय-3, पृष्ठ 23

विद्यार्थी दोनों समूहों के बीच सम्बन्ध को समझने के बजाय एक साथ सभी छवियों को गिनने लगते हैं, जिससे गलतियाँ होती हैं।



4 बच्चे और 2 बच्चे मिलकर होते हैं ___ बच्चे।

$$4 + 2 = \square$$

चित्र-20 : कक्षा-1, अध्याय-5, पृष्ठ 49

समाधान का सुझाव

यह पंक्ति जोड़ें : 'अगर पासा फेंकने पर ऐसी संख्या आती है जिससे जुड़े सभी खानों में पहले से ही रंग भरे हुए हों, तो अपनी बारी को छोड़ दें।'

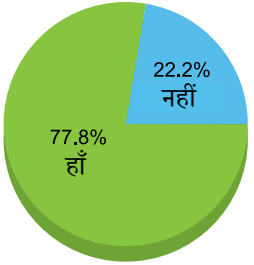
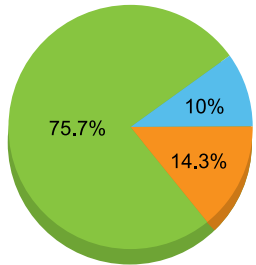
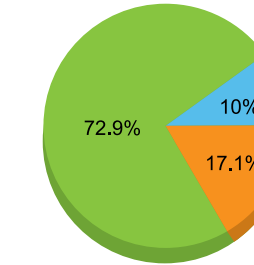
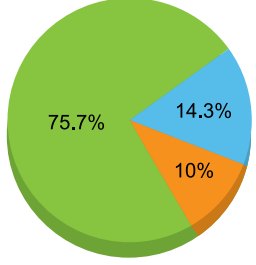
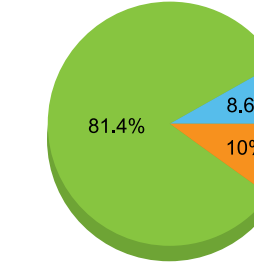
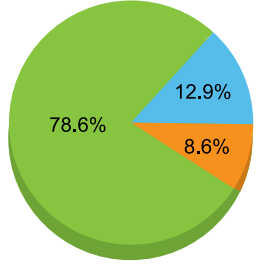
इस तरह, बिना किसी भ्रम के गतिविधि सहज जारी रह सकती है।

- दृशात्मक स्थान को फैलाएँ, जिससे रेखाएँ एक-दूसरे के ऊपर नहीं आएँ।
- एक और तरीका यह हो सकता है कि विद्यार्थियों से कहें कि वे तस्वीर के बगल में वस्तुओं की संख्या लिखें और उनकी तुलना बच्चों की संख्या से करें। इससे यह प्रक्रिया सरल हो जाएगी, तथा 'इससे अधिक', 'इससे कम', या 'इसके बराबर' जैसी अवधारणाओं से बच्चों को परिचित करवाया जा सकेगा।

- बच्चों को इस गतिविधि को चरणों में विभाजित करने के लिए प्रोत्साहित करें, जैसे कि दोनों समूहों को अलग-अलग पहचानना और उन्हें जोड़ने से पहले गिनना।
- ऐसे सवाल करें जिनसे बच्चे खास दिशा में सोचें, जैसे : "पहले समूह में कितने बच्चे हैं? दूसरे में कितने बच्चे हैं? जब हम उन्हें साथ मिलाएँगे तो क्या होगा?"

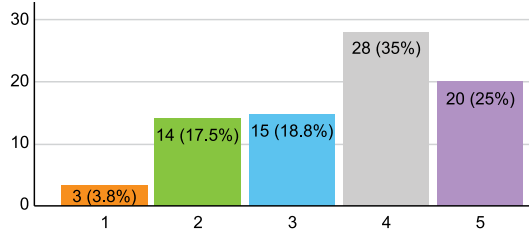
इस तरह की मदद बच्चों को संख्याओं की समझ विकसित करने और गलतियों से बचने में सहायक होगी।

आइए, अब उस सर्वे के ब्यौरे पर नज़र डालें, जिसमें देश भर के 90 शिक्षक शामिल थे। यह सर्वे हमें बताता है कि शिक्षक कक्षा-1 व 2 की गणित की पाठ्यपुस्तकों के नए संस्करण को किस तरह देखते हैं।

<p>क्या आपने कक्षा-1 या 2 के विद्यार्थियों को एनसीईआरटी की गणित की पुरानी पाठ्यपुस्तक से पढ़ाया है? 90 जवाब</p>  <table border="1"> <tr> <td>77.8%</td> <td>हाँ</td> </tr> <tr> <td>22.2%</td> <td>नहीं</td> </tr> </table>	77.8%	हाँ	22.2%	नहीं	<p>गणित की पाठ्यपुस्तक का कौन-सा संस्करण ज़्यादा दृश्यात्मक (ज़्यादा चित्रों वाला) है? 70 जवाब</p>  <table border="1"> <tr> <td>14.3%</td> <td>पुराना संस्करण (गणित का जादू)</td> </tr> <tr> <td>75.7%</td> <td>वर्तमान संस्करण (आनन्दमय गणित)</td> </tr> <tr> <td>10%</td> <td>दोनों समान ही हैं</td> </tr> </table>	14.3%	पुराना संस्करण (गणित का जादू)	75.7%	वर्तमान संस्करण (आनन्दमय गणित)	10%	दोनों समान ही हैं		
77.8%	हाँ												
22.2%	नहीं												
14.3%	पुराना संस्करण (गणित का जादू)												
75.7%	वर्तमान संस्करण (आनन्दमय गणित)												
10%	दोनों समान ही हैं												
<p>गणित की पाठ्यपुस्तक का कौन-सा संस्करण ज़्यादा दिलचस्प है? 70 जवाब</p>  <table border="1"> <tr> <td>17.1%</td> <td>पुराना संस्करण</td> </tr> <tr> <td>72.9%</td> <td>वर्तमान संस्करण</td> </tr> <tr> <td>10%</td> <td>दोनों समान ही हैं</td> </tr> </table>	17.1%	पुराना संस्करण	72.9%	वर्तमान संस्करण	10%	दोनों समान ही हैं	<p>किस संस्करण में शिक्षक के लिए ज़्यादा निर्देश हैं? 70 जवाब</p>  <table border="1"> <tr> <td>10%</td> <td>पुराना संस्करण</td> </tr> <tr> <td>75.7%</td> <td>वर्तमान संस्करण</td> </tr> <tr> <td>14.3%</td> <td>दोनों समान ही हैं</td> </tr> </table>	10%	पुराना संस्करण	75.7%	वर्तमान संस्करण	14.3%	दोनों समान ही हैं
17.1%	पुराना संस्करण												
72.9%	वर्तमान संस्करण												
10%	दोनों समान ही हैं												
10%	पुराना संस्करण												
75.7%	वर्तमान संस्करण												
14.3%	दोनों समान ही हैं												
<p>आपके मुताबिक विद्यार्थियों को किस संस्करण में ज़्यादा मज़ा आया? 70 जवाब</p>  <table border="1"> <tr> <td>10%</td> <td>पुराना संस्करण</td> </tr> <tr> <td>81.4%</td> <td>वर्तमान संस्करण</td> </tr> <tr> <td>8.6%</td> <td>दोनों समान ही हैं</td> </tr> </table>	10%	पुराना संस्करण	81.4%	वर्तमान संस्करण	8.6%	दोनों समान ही हैं	<p>आपको कौन-सा संस्करण पसन्द है? 70 जवाब</p>  <table border="1"> <tr> <td>8.6%</td> <td>पुराना संस्करण</td> </tr> <tr> <td>78.6%</td> <td>वर्तमान संस्करण</td> </tr> <tr> <td>12.9%</td> <td>दोनों समान ही हैं</td> </tr> </table>	8.6%	पुराना संस्करण	78.6%	वर्तमान संस्करण	12.9%	दोनों समान ही हैं
10%	पुराना संस्करण												
81.4%	वर्तमान संस्करण												
8.6%	दोनों समान ही हैं												
8.6%	पुराना संस्करण												
78.6%	वर्तमान संस्करण												
12.9%	दोनों समान ही हैं												
<p>नए संस्करण में 3 सबसे अच्छी बातें :</p> <ul style="list-style-type: none"> • बहुत सारी तस्वीरें • कई अवधारणाओं का अच्छा चित्रण • कहानियाँ और गतिविधियाँ 	<p>ऐसी 3 सबसे ज़रूरी बातें जो नए संस्करण में बदलनी/अलग तरीके से करनी चाहिए :</p> <ul style="list-style-type: none"> • अभ्यास को बढ़ाएँ • ऐसे शब्द/शब्दावली का इस्तेमाल करें जिनको अमूमन सभी समझते हों • कहानियों/खेलों/गतिविधियों की संख्या बढ़ाएँ 												

1 से 5 की रेटिंग पर, आप कक्षा-1 की गणित की वर्तमान पाठ्यपुस्तक को कितना रेट करेंगे?

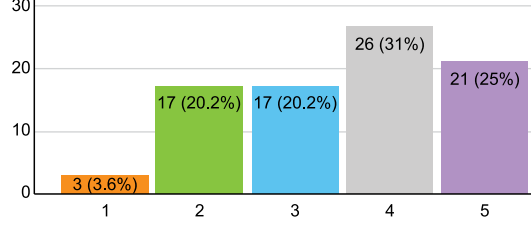
80 जवाब



60% ने कक्षा-1 की पाठ्यपुस्तक के नए संस्करण के लिए 4 या उससे ज़्यादा की रेटिंग दी है।

1 से 5 की रेटिंग पर, आप कक्षा-2 की गणित की वर्तमान पाठ्यपुस्तक को कितना रेट करेंगे?

84 जवाब



56% ने कक्षा-2 की पाठ्यपुस्तक के नए संस्करण के लिए 4 या उससे ज़्यादा की रेटिंग दी है।

कक्षा-1 व 2 के लिए एनसीईआरटी की गणित की नई पाठ्यपुस्तकों को जिन शिक्षकों ने पसन्द किया है, उन्होंने बहुत सोच-समझकर डिज़ाइन किए गए अध्यायों और उनमें शामिल तौर-तरीकों की तारीफ़ की है। शिक्षक पाते हैं कि इन नई पाठ्यपुस्तकों में क्यूआर कोड के ज़रिए अतिरिक्त सामग्री तक आसान पहुँच है। शिक्षकों के लिए साफ़-साफ़ निर्देश होने के साथ-साथ हर अध्याय में सीखने-सिखाने की कई दिलचस्प विधियाँ दी गई हैं, जिनमें कहानियाँ, कविताएँ, तस्वीरें, वास्तविक जीवन से जुड़ी गतिविधियाँ, सांस्कृतिक सन्दर्भ और प्रोजेक्ट कार्य शामिल हैं। इसके अलावा, इनमें शामिल पहेलियाँ विद्यार्थियों और शिक्षकों दोनों के लिए स्फूर्तिदायक हैं।

हालाँकि, सुधार के लिए कुछ सुझाव भी हैं। खासकर अध्यायों के क्रम और कक्षा-2 में लिखित पाठ्य की मात्रा, अभ्यास के कामों के लिए दी गई जगह, अभ्यास के प्रश्नों की संख्या, और साथ ही कुछ अवधारणाओं के महत्त्व पर शिक्षकों के लिए ज़्यादा स्पष्ट मार्गदर्शन की ज़रूरत और इन्हें पढ़ाने के लिए अलग तरीकों की आवश्यकता शामिल हैं। पाठ्यपुस्तकों के अगले संस्करण में इन बातों पर ज़्यादा ध्यान दिया जा सकता है।

हम इस निष्कर्ष पर पहुँचे हैं कि पाठ्यपुस्तकों का नया संस्करण बेहतर सम्भावनाएँ लिए हुए एक उम्मीद भरा क़दम है, जो ज़्यादा इंटरैक्टिव, व्यावहारिक और शिक्षण के समग्र अनुभव को बढ़ावा देता है। हालाँकि अभी भी कुछ जगहों पर सुधार की ज़रूरत है, लेकिन शिक्षकों से मिली सकारात्मक प्रतिक्रिया और पाठ्यपुस्तकों की नई खूबियाँ यह दिखाती हैं कि ये पाठ्यपुस्तकें युवा शिक्षार्थियों के लिए गणित को ज़्यादा आनन्ददायक और सार्थक अनुभव बनाने की दिशा में हैं।

सन्दर्भ :

1. आनन्दमय गणित : कक्षा 1 (2023), एनसीईआरटी <https://ncert.nic.in/textbook.php?ahjm1=0-13>
2. आनन्दमय गणित : कक्षा 2 (2023), एनसीईआरटी <https://ncert.nic.in/textbook.php?bhjm1=0-11>
3. राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा फ़ाउण्डेशनल स्टेज (एनसीईएफ़-एफ़एस) (2023)

सम्पादक की टिप्पणी : पाठ्यपुस्तकों के सभी चित्र एनसीईआरटी की अनुमति से लिए गए हैं।



क्षमा चक्रवर्ती एक अध्यापक (educator) हैं। उन्होंने आईआईटी मद्रास से गणित में स्नातकोत्तर की उपाधि और अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी से शिक्षा में स्नातकोत्तर की उपाधि हासिल की है। गणित की शिक्षा में 15 से अधिक वर्षों के अनुभव के साथ, उन्होंने सामग्रियों के विकास, शिक्षण और शिक्षक प्रशिक्षण जैसे क्षेत्रों में काम किया है, साथ ही विद्यार्थियों के साक्षात्कार किए हैं और मूल्यांकन तैयार किए हैं। क्षमा में युवा मनोमस्तिष्क को विकास के रास्ते पर ले जाने का जुनून है। उन्हें छोटे बच्चों के साथ समय बिताना और कुदरत का आनन्द लेना भाता है। उनसे kshamagc@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।



सोनिया कुण्डू जुलाई 2021 से अज़ीम प्रेमजी फ़ाउण्डेशन के साथ काम कर रही हैं। उनका खास ज़ोर शिक्षा के फ़ाउण्डेशनल स्टेज पर है। युवा शिक्षार्थियों को उनके शुरुआती वर्षों में पढ़ाना, उनका मार्गदर्शन करना और उनका सशक्तीकरण सोनिया के काम का हिस्सा है, जिससे बच्चों का समग्र विकास सुनिश्चित हो, साथ ही वे ज़रूरी कौशल सीखें और भावी शिक्षा के लिए उनका मज़बूत आधार तैयार हो पाए। उनसे soniakundu1911@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : हिमालय तहसीन **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता

पेपर फोल्डिंग के माध्यम से वृत्त को समझना

राहुल सिंह राठौर

पेपर फोल्डिंग की गतिविधि किस तरह एक वृत्त को जानने-समझने में मदद कर सकती है। इस बारे में कक्षा-4 के विद्यार्थियों के साथ लेखक के अनुभव पढ़िए।

मैं कक्षा-4 में विद्यार्थियों को उनके आस-पास की आकृतियों के बारे में समझ बनाने में मदद करने पर काम कर रहा था। विशेष रूप से, मैं चाहता था कि मेरे विद्यार्थी वृत्त के केन्द्र, त्रिज्या और व्यास को पहचान सकें।

इसके लिए आकृतियों के बारे में विद्यार्थियों की आवश्यक पूर्व-समझ जाँचने और फिर अपने लक्ष्य की ओर आगे बढ़ने के लिए मैंने निम्नलिखित योजना बनाई :

- आस-पास की गोल और वृत्ताकार आकृतियों को देखें और पहचानें।
- ऐसी वस्तुओं को इकट्ठा करें जो वृत्त की आकृति उकेरने में मदद करती हैं।
- सिक्कों, चूड़ियों आदि का उपयोग करके वृत्त बनाएँ।
- कागज़ को मोड़कर वृत्त बनाएँ।
- अलग-अलग लम्बाई के धागों का उपयोग करके बढ़ते और घटते वृत्तों को समझें।
- वृत्त से जुड़ी शब्दावली सीखें और उसका उपयोग करें।
- परकार (कम्पास) का उपयोग करके एक वृत्त बनाएँ।

बच्चों ने आसानी से गोल और वृत्ताकार आकृतियों को पहचान लिया। उन्होंने बोटल के ढक्कन, कटोरे, चूड़ियों, चाँदा (प्रोट्रेक्टर) आदि का उपयोग करके वृत्त बनाए। फिर मैंने उनसे पूछा कि अगर इन वस्तुओं का उपयोग किए बिना छोटे



फ्रीहैंड वृत्त बनाते हुए विद्यार्थी

की-वर्ड : ज्यामिति, वृत्त, संकल्पनात्मक समझ, किरिगामी, अनुभवात्मक शिक्षा

या बड़े वृत्त बनाना हो तो वे क्या करेंगे। थोड़ा सोचने के बाद, उन्होंने फ्रीहैंड वृत्त बनाने की कोशिश की (फोटो देखें)। लेकिन उन्हें समझ आया कि ये वृत्त उतने सटीक नहीं बने थे।

पेपर फोल्डिंग से वृत्त बनाना

जब मैंने कक्षा में कागज़ का उपयोग करके एक वृत्त बनाने के बारे में बात की तो सभी बच्चे इस बात को लेकर उत्सुक थे कि यह वृत्त कैसे बनाया जाएगा। पेपर फोल्डिंग और कैंची से काटकर कुछ रचने की प्रक्रिया को किरिगामी कहते हैं। किरिगामी रचनात्मकता को ज्यामिति से जोड़ने वाली एक अद्भुत प्रक्रिया है। अधिकांश लोग समझते हैं कि कागज़ की शिल्पकला यानी सारस, फूल जैसी चीज़ें बनाना है, लेकिन इस सरल और गहन शिल्प के माध्यम से एक सटीक ज्यामितीय आकृति, जैसे कि एक वृत्त, बनाने की प्रक्रिया भी शुरू की जा सकती है। किसी सादे कागज़ को मोड़कर उससे एक वृत्त बनाना, एक वर्ग या त्रिभुज बनाने जितना सहज नहीं है, लेकिन सही तकनीक से ऐसा कर पाना निश्चित रूप से सम्भव है।

यह लेख बताता है कि किस तरह पेपर फोल्डिंग की कला का उपयोग वृत्त बनाने के लिए किया जा सकता है और कैसे कलात्मकता और गणित को मज़ेदार और शिक्षाप्रद तरीके से साथ लाया जा सकता है।

पेपर फोल्डिंग से वृत्त बनाने की चुनौती

पहली नज़र में, कागज़ मोड़कर एकदम सटीक वृत्त बनाना असम्भव लग सकता है। आखिरकार, वृत्त को उन बिन्दुओं के समूह के रूप में परिभाषित किया जाता है जो एक केन्द्रीय बिन्दु से एक समान दूरी पर स्थित होते हैं। कागज़ पर हर मोड़ जहाँ सीधी रेखाएँ या तीखे कोण बनाता है, उससे एक विशुद्ध वक्र (घुमाव) बना पाना उल्टी बात करने जैसा लग सकता है।

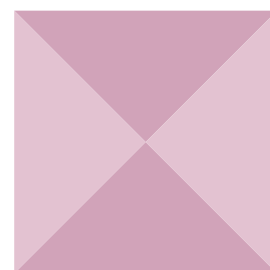
हालाँकि, किरिगामी के सिद्धान्तों का उपयोग करके एक लगभग वृत्त बनाना सम्भव है। इस प्रक्रिया में आमतौर पर कागज़ को कई बार मोड़ा जाता है। हर मोड़ उसके आकार को परिष्कृत करता है। मोड़ने की प्रक्रिया तब तक जारी रहती है जब तक कि वह क़रीब-क़रीब वृत्ताकार रूप नहीं ले लेता।

पेपर फोल्डिंग से वृत्त बनाने की बुनियादी तकनीक

कागज़ मोड़कर वृत्त बनाने के कई तरीके हैं। सभी में कागज़ को सटीकता से मोड़ना और सममिति आवश्यक होती है। यहाँ एक वृत्त बनाने के लिए एक सामान्य तरीका चरण-दर-चरण दिया गया है। सबसे पहले एक वर्गाकार कागज़ लें। आयताकार कागज़ भी लिया जा सकता है, लेकिन वर्गाकार कागज़ सममिति देता है और मोड़ने की प्रक्रिया को आसान बनाता है।

चरण-1 : विकर्ण से मोड़ें

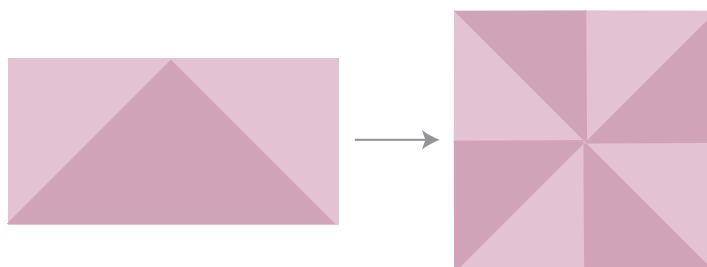
सबसे पहले, कागज़ को एक विकर्ण रेखा पर (एक कोने से तिरछे में विपरीत कोने तक) मोड़ें, फिर दूसरी विकर्ण रेखा पर मोड़ें। जब हम इस तरह मोड़कर कागज़ खोलते हैं तो कागज़ के केन्द्र में एक क्रॉस दिखाई देता है।



चरण-1

चरण-2 : आड़े और खड़े में कागज़ आधा मोड़ें

इसके बाद, कागज़ को आड़े और खड़े (क्षैतिज और लम्बवत स्थिति) में आधा मोड़ें। जब हम कागज़ को खोलते हैं, तो हम पाते हैं कि कागज़ के मध्य में दो और रेखाएँ बन गईं, जो पहले बने क्रॉस से होकर गुज़र रही हैं।

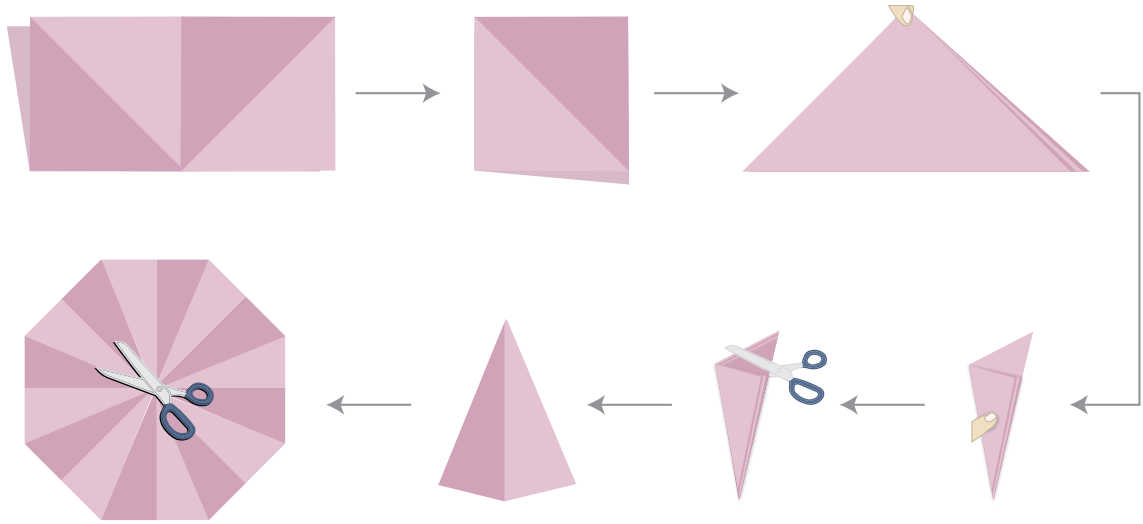


चरण-2क

चरण-2ख

चरण-3 : कोनों को केन्द्र की ओर मोड़ें

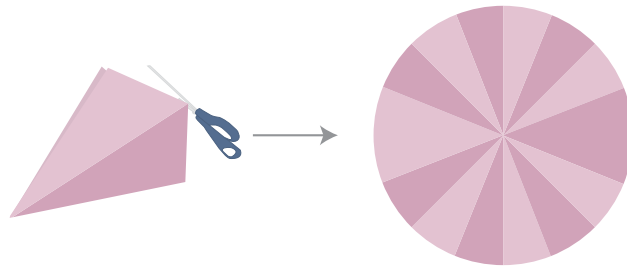
इसके बाद, कागज़ को इस तरह मोड़ें कि एक आयत बने और फिर इस तरह मोड़ें कि एक वर्ग बने। अब इससे त्रिभुज बनाने के लिए वर्ग के दो विपरीत कोनों को एक साथ लाएँ। त्रिभुज की दो एक-जैसी भुजाओं को एक साथ लाकर (मोड़कर) एक छोटा त्रिभुज बनाएँ और बाहर निकल रहे अतिरिक्त हिस्से को काट दें। कागज़ को खोलें, आपको एक बहुभुज मिलेगा।



चरण-3

चरण-4 : आकार को परिष्कृत करें

बहुभुज को देख लेने के बाद कागज़ को फिर से मोड़ें और नुकीले कोनों को (काटकर) हटा दें और धीरे-धीरे इसे लगभग वृत्ताकार रूप दें। हालाँकि इन मोड़ों से सम्पूर्ण, सटीक गणितीय वृत्त नहीं बनेगा, लेकिन ये लगभग वृत्त बनाने में मदद करते हैं।



चरण-4

पेपर फोल्डिंग से लगभग वृत्त क्यों मिलता है

कागज़ मोड़कर लगभग वृत्त बनाना सम्भव है क्योंकि यह ज्यामितीय निकटीकरण के गुणों पर आधारित है। जब भी आप किनारों को केन्द्र की ओर मोड़ते हैं, तो आप धीरे-धीरे सीधी भुजाओं (किनारों) की संख्या कम करते जाते हैं और एक आदर्श वृत्त के करीब एक आकार बनाते हैं। प्रत्येक मोड़ के साथ, कागज़ अधिक 'वक्रित' ज्यामिति की ओर बढ़ता है, भले ही परिणाम एक लगभग वृत्त ही हो। हमारे ऐसा करने के बाद, बच्चों ने प्रत्येक त्रिज्या खण्ड में रंग भरे। यह नोट करना महत्वपूर्ण था कि इस बिन्दु पर बच्चों ने कहा कि प्रत्येक रंगे हुए हिस्से में, केन्द्र से किनारे तक जो सीधी रेखाएँ आ रही हैं, हर जगह उसकी लम्बाई समान है। फिर हमने 'त्रिज्या' शब्द पर चर्चा की। मैंने समझाया कि यह केन्द्र से वृत्त के किनारे तक आने वाली कोई भी रेखा हो सकती है। ऐसी सभी रेखाएँ समान लम्बाई की थीं। कुछ बच्चों ने जो कागज़ मोड़ा था वे उसमें आसानी से देख सकते थे। बच्चों ने यह भी देखा कि एक किनारे से दूसरे किनारे तक एक

मोड़ है जो वृत्त के केन्द्र से होकर गुजरता है और त्रिज्या की लम्बाई का दोगुना है। मैंने समझाया कि इसे वृत्त का व्यास कहा जाता है।

मोड़ की रेखाओं का उपयोग करके वृत्त के केन्द्र, त्रिज्या और व्यास पर चर्चा करने के बाद मैंने बच्चों से कक्षा से बाहर जाने और उन्होंने जो सीखा था, उसका उपयोग करके वृत्त बनाने के तरीकों के बारे में सोचने के लिए कहा।



बच्चे अपने पैरों का उपयोग करके एक वृत्त बनाते हैं बच्चों ने रस्सी के दोनों छोर पर नुकीली वस्तुएँ बाँधी और वृत्त बनाया

दोनों मामलों में, जिस बात ने मुझे खुश किया वह यह थी कि उन्होंने केन्द्र और त्रिज्या के महत्त्व को पहचाना। यहाँ तक कि रस्सी की लम्बाई बदलकर वे बड़े और छोटे वृत्त बना पा रहे थे। इसके बाद, इस पर चर्चा हुई कि अपनी नोटबुक में वृत्त कैसे बनाया जाए। इस चर्चा में एक बच्चे ने कहा कि उसने कुछ बच्चों को परकार से वृत्त बनाते देखा है। रस्सी के अनुभव का उपयोग करते हुए निम्नलिखित विधि सोची गई।

परकार की मदद से

1. परकार के गोले में पेंसिल फँसाएँ और परकार की नोक को वहाँ रखें जहाँ आप वृत्त का केन्द्र रखना चाहते हैं।
2. परकार को उतना खोलें जितनी लम्बाई की आपको त्रिज्या चाहिए।
3. परकार की नोक को स्थिर रखते हुए, परकार को घुमाकर वृत्त बनाएँ।

परिभाषाओं पर पहुँचना

- केन्द्र : वृत्त का केन्द्रीय बिन्दु।
- त्रिज्या : केन्द्र से वृत्त (रेखा) पर स्थित किसी भी बिन्दु तक की दूरी।
- व्यास : वृत्त के एक सिरे से दूसरे सिरे तक की वह दूरी जो केन्द्र से होकर गुजरती है। (त्रिज्या का दोगुना)
- परिधि : वृत्त के चारों ओर (बाहरी दायरे) की दूरी।
- चाप : वृत्त की परिधि का एक भाग।
- जीवा : वृत्त की परिधि पर स्थित किन्हीं दो बिन्दुओं को जोड़ने वाला रेखाखण्ड।
- स्पर्श रेखा : वह रेखा जो वृत्त को ठीक एक बिन्दु पर स्पर्श करती है।

वृत्त के बारे में सीखने के लिए गतिविधियाँ और प्रश्न

1. एक वृत्त बनाएँ : परकार या गोल वस्तु का उपयोग करके एक वृत्त बनाएँ।
2. त्रिज्या और व्यास मापें : एक वृत्त की त्रिज्या और व्यास को मापने के लिए पैमाने का उपयोग करें। यह कक्षा में किया गया था।
3. एक वृत्त के चारों ओर चलें : किसी गोल वस्तु, जैसे फ्रिसबी या प्लेट, के चारों ओर चलकर परिधि को समझें।

4. वृत्त की विशेषताओं पर चर्चा करें। हमारी चर्चा के निष्कर्ष थे :

- एक वृत्त में कोई कोने या किनारे नहीं होते।
- वृत्त पर स्थित सभी बिन्दु इसके केन्द्र से समान दूरी पर होते हैं।
- आप उन सभी बिन्दुओं को जोड़कर एक वृत्त बना सकते हैं जो केन्द्र से समान दूरी पर हैं।

वृत्त हमारे चारों ओर हैं! वृत्त को समझना गणित, विज्ञान और यहाँ तक कि हमारे दैनिक जीवन में भी मदद कर सकता है। याद रखें, एक वृत्त एक गोल आकार है जिसमें एक केन्द्र, त्रिज्या, व्यास और परिधि होती है।

अनुप्रयोग और अन्तर्दृष्टि

काग़ज़ मोड़कर वृत्त बनाना केवल एक शिल्पकला नहीं है; यह ज्यामिति और सममिति के बारे में महत्वपूर्ण अन्तर्दृष्टि भी प्रदान करता है। इस प्रक्रिया के माध्यम से, आप यह गहराई से समझ सकते हैं कि आकार एक-दूसरे से कैसे सम्बन्धित हैं और सीधी रेखाओं को वक्रिय बनाने के लिए कैसे संशोधित किया जा सकता है। यह तकनीक यह भी दर्शाती है कि काग़ज़ का उपयोग गणितीय गुणों जैसे सटीकता, अनुमान और रूपान्तरण को समझने के लिए कैसे किया जा सकता है।

इस हैंड्स-ऑन प्रक्रिया को करके आप न केवल ज्यामितीय आकृतियों की सुन्दरता के प्रति अधिक सराहनीय नज़रिया विकसित करते हैं, बल्कि प्रत्यक्ष रूप से यह भी अनुभव करते हैं कि ज्यामिति के नियम वास्तविक दुनिया में कैसे प्रकट हो सकते हैं।

शिक्षणशास्त्र में, इस प्रकार की काग़ज़ मोड़ने की गतिविधियों का उपयोग विद्यार्थियों को वृत्त, सममिति और निकटीकरण के बारे में सिखाने के लिए किया जा सकता है। दृश्य और करके देख सकने वाली शिक्षा के माध्यम से विद्यार्थी सपाट, सीधी आकृतियों और वक्रित, वृत्ताकार रूपों के बीच के सम्बन्ध देख सकते हैं।

निष्कर्ष

हालाँकि काग़ज़ मोड़कर एक आदर्श गणितीय वृत्त नहीं बना सकते, लेकिन यह सरल साधनों और विधियों का उपयोग करके लगभग इस सुन्दर आकृति को बनाने का एक आकर्षक तरीका प्रदान करता है। काग़ज़ मोड़ने की प्रक्रिया हमें सीधी रेखाओं और वक्रों के बीच के सम्बन्ध के बारे में सिखाती है और गणितीय सिद्धान्तों की अनुभवात्मक समझ प्रदान करती है। चाहे कलात्मक अभिव्यक्ति के लिए हो, शैक्षिक उद्देश्यों के लिए या व्यक्तिगत जिज्ञासा के लिए, काग़ज़ मोड़कर वृत्त बनाने की क्रिया ज्यामिति की एक अनूठी और पारितोषिक खोज प्रदान करती है।

Reference

1. Learning outcome - Identify the centre, radius and diameter of a circle from Sims and NCF 2005.
2. <https://youtu.be/cSst1EW7LtY?si=X37BdCikTrRj6EwO>



राहुल सिंह राठौर फरवरी 2012 से अज़ीम प्रेमजी फ़ाउण्डेशन स्कूल, सिरोही में शिक्षक हैं। इससे पहले, उन्होंने राजस्थान में गणित शिक्षक और अतिथि व्याख्याता के रूप में कार्य किया है। उनके पास गणित में स्नातकोत्तर (मास्टर्स) डिग्री है और साथ ही उन्होंने बीएड, आरटीईटी (RTET) और पीजीडीसीए (PGDCA) भी पूरा किया है। राहुल से rahul.rathore@azimpremjifoundation.org पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : निशान्त राणा **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय

सीखने के विविध उद्देश्यों के लिए प्रश्न तैयार करना

शेख मोहम्मद ज़ाहिद

कई बच्चों को गणित की परीक्षाएँ 'डरावनी' लगती हैं, क्योंकि वे उन्हें जटिल विधियों और सूत्रों को समझने व इस्तेमाल करने की अपनी क्षमता का उच्च स्तरीय आकलन मानते हैं। आमतौर पर, परीक्षाओं और टेस्ट में ऐसे प्रश्न होते हैं जो किसी विशिष्ट विषय में विद्यार्थी की समझ को परखने के लिए बनाए जाते हैं। लेकिन प्रश्न क्या केवल आकलन करने और जाँचने के लिए होते हैं? गौर-से देखें तो पता चलता है कि प्रश्नों में इससे कहीं अधिक करने की क्षमता होती है। उदाहरण के लिए, सुकरात ने प्रश्नों का उपयोग जटिल विचारों की पड़ताल करने, मान्यताओं को चुनौती देने और ज्ञान की खोज के लिए किया था।

आमतौर पर जो प्रश्न हम परीक्षाओं में पूछते हैं वे सीधे व बिना पेंच के होते हैं। उनमें सोचने-विचारने की गुंजाइश नहीं होती है। बच्चे स्वाभाविक रूप से जिज्ञासु होते हैं और गणित के सीधे-सीधे प्रश्न हमेशा उनकी जिज्ञासा को उकसा नहीं पाते हैं। विशिष्ट उद्देश्यों (जैसे कि अवधारणाओं की समझ को बढ़ावा देना, कौशल विकसित करना और नए गुणधर्मों को समझना) को ध्यान में रखकर तैयार किए गए प्रभावी प्रश्न बच्चों के लिए काफ़ी फ़ायदेमन्द हो सकते हैं। ऐसे प्रश्नों को हमारे आकलन का हिस्सा होना चाहिए ताकि विद्यार्थी अवधारणाओं को गहराई से समझ सकें और रटने के तरीकों से दूर हो सकें।

चित्र-1 और **चित्र-2** में दिए गए प्रश्नों पर विचार करें। **चित्र-1** में सही समय चुनने के लिए पूछे जाने वाला एक मानक प्रश्न दिया गया है। हालाँकि समय की समझ को जाँचने-परखने के लिए यह एक अच्छा प्रश्न है, लेकिन इसमें सोचने की कोई खास गुंजाइश नहीं है। **चित्र-2** में इसी प्रश्न को थोड़ा बदल दिया गया है। इसमें घड़ी का मिनट का काँटा हटा दिया गया है। यह प्रश्न सोचने के लिए प्रेरित करता है और हमें समय का अनुमान लगाना सिखाता है।

इस घड़ी में कितने बजे हैं?



(क) 7:03 (ख) 7:30 (ग) 3:07 (घ) 7:15

चित्र-1

इस घड़ी का मिनट का काँटा टूट गया है और केवल घण्टे का काँटा काम कर रहा है, जैसा कि चित्र में दिखाया गया है। इस घड़ी में कितने बजे हैं?

(सबसे उपयुक्त विकल्प को चुनें।)



(क) 4:00 (ख) 4:10 (ग) 4:30 (घ) 4:50

चित्र-2

की-वर्ड : आकलन, डिज़ाइन, सीखने के उद्देश्य, सोचने के कौशल

आजकल ली जाने वाली अधिकांश परीक्षाएँ अवधारणाओं को समझने की बजाय तथ्यों को रटने पर आधारित होती हैं। 2020 में आई राष्ट्रीय शिक्षा नीति (NEP) के साथ शिक्षा व्यवस्था में सुधार लाने और आकलन के उद्देश्य को उच्च स्तरीय सोच की ओर केन्द्रित करने के लिए नई पहल की जा रही है। इसी दिशा में 'परख' (PARAKH – Performance Assessment, Review, and Analysis of Knowledge for Holistic Development) की शुरुआत की गई है। 'परख' का उद्देश्य बच्चों के समग्र विकास का आकलन करना है। यह केवल उनके शैक्षणिक प्रदर्शन तक सीमित नहीं है, बल्कि इसमें उनके संज्ञानात्मक, सामाजिक और भावनात्मक विकास को भी ध्यान में रखा जाता है।

'ओपन डोर एजुकेशन' (www.opendooreducation.in) में हम ऐसे प्रश्न बनाते हैं जो न केवल समझ को परखते हैं, बल्कि प्रश्नों को हल करते समय रचनात्मक रूप से सोचने के लिए बच्चों को प्रेरित भी करते हैं। हम विविध प्रकार के प्रश्न बनाते हैं जो अवधारणाओं को स्पष्ट करते हैं और बच्चों को उन्हें गहराई से समझने में मदद करते हैं। इस लेख में, हम ऐसे कुछ प्रश्नों के उदाहरण प्रस्तुत कर रहे हैं ताकि यह दिखाया जा सके कि विभिन्न उद्देश्यों को ध्यान में रखकर बनाए गए प्रश्न किस तरह चर्चा को प्रेरित कर सकते हैं। और कैसे किसी विशिष्ट विषय पर विभिन्न प्रकार के प्रश्न बनाकर उनकी दक्षता का आकलन किया जा सकता है।

सोचने को प्रेरित करने वाले प्रश्न बनाना

चित्र-3 में दिया गया प्रश्न बच्चों को अप्रत्यक्ष रूप से यह सिखाने के लिए तैयार किया गया है कि "पूर्ण संख्याओं के समुच्चय में कोई सबसे बड़ी पूर्ण संख्या नहीं होती।" जब विद्यार्थी इस प्रश्न को हल करने की कोशिश करते हैं, तो वे

यदि आप सभी पूर्ण संख्याओं पर विचार करें, तो निम्न में से किसे कागज़ पर लिखा जा सकता है?

- I. सबसे बड़ी पूर्ण संख्या
 - II. सबसे छोटी पूर्ण संख्या
- (क) केवल I (ख) केवल II
(ग) I और II, दोनों (घ) कोई नहीं

चित्र-3

सामान्यतः उस सबसे बड़ी संख्या को लिखते हैं जो उन्हें सूझती है। लेकिन जल्दी ही वे यह समझ जाते हैं कि वे हमेशा उस संख्या से बड़ी संख्या चुन सकते हैं, जो उन्होंने अभी लिखी है। इस तरह वे इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि कोई सबसे बड़ी पूर्ण संख्या नहीं होती। यह प्रश्न दर्शाता है कि गणित के प्रश्नों को थोड़े अलग ढंग से पूछने से वे कहीं अधिक इंटरैक्टिव और दिलचस्प गतिविधि बन सकते हैं।

गणित में दो महत्वपूर्ण संख्याएँ होती हैं : 0 और 1 । 0 को पूर्ण संख्याओं के लिए योज्य तत्समक (additive identity) माना जाता है, और 1 को पूर्ण संख्याओं के गुणनात्मक तत्समक (multiplicative identity) के रूप में जाना जाता है। एक प्रश्न को हल करके इन तकनीकी शब्दों का महत्व समझना दिलचस्प होगा। हमने कक्षा-6 के बच्चों के लिए ऐसा ही एक प्रश्न (चित्र-4 देखें) तैयार किया है, जो इन गणितीय शब्दों के उपयोग को स्पष्ट करता है।

यहाँ कुछ चीनी संख्याओं का गुणनफल दर्शाया गया है। यदि इन चीनी संख्याओं में पूर्ण संख्याओं के सभी गुणधर्म हों, तो 壹 प्रतीक निम्न में से कौन-सी संख्या को दर्शाता है? (संकेत : पूर्ण संख्याओं के गुणधर्मों को ध्यान में रखें।)

$$\boxed{\text{壹} \times \text{柒} = \text{柒}} \quad \boxed{\text{壹} \times \text{玖} = \text{玖}}$$

- (क) 0
(ख) 1
(ग) 0 या 1 में से कोई भी हो सकता है
(घ) कहा नहीं जा सकता

चित्र-4

यदि x और y कोई पूर्ण संख्याएँ हैं, तो $x + 0 = x$ और $y \times 1 = y$ होता है। हम देखते हैं कि किसी भी पूर्ण संख्या में 0 जोड़ने पर वही संख्या मिलती है, और किसी भी पूर्ण संख्या को 1 से गुणा करने पर भी वही संख्या मिलती है। यदि हम इसे व्यापक रूप में देखें, तो हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि यह गुणधर्म किसी भी संख्या प्रणाली पर लागू होता है। चित्र-4 में दिए गए प्रश्न को हल करने के लिए बच्चों को सिर्फ़ इन प्रतीकों के पैटर्न को ध्यान से देखना होगा और यह जानना होगा कि 1 गुणनात्मक तत्समक होता है।

आइए, अब देखते हैं कि एक प्रश्न के ज़रिए रोचक गुणधर्मों को खोजने में हम बच्चों की मदद किस तरह कर सकते हैं।

हम जानते हैं कि यदि किसी संख्या के अंकों का योग 3 से

विभाजित होता है, तो वह संख्या भी 3 से विभाजित होती है। एक सामान्य-सा अवलोकन यह है कि यदि हम उन अंकों के स्थान बदलकर एक नई संख्या बनाएँ, तो वह संख्या भी 3 से विभाजित होगी क्योंकि अंकों का योगफल तो वही रहेगा। **चित्र-5** में दिया गया प्रश्न कुछ स्कूलों में कक्षा-5 के बच्चों से पूछा गया है। हालाँकि यह प्रश्न सरल है, लेकिन फिर भी यह बच्चों को गणित के कुछ रोचक गुणधर्मों की खोज व पड़ताल करने के लिए प्रेरित करता है। **चित्र-6** में इसी प्रश्न का थोड़ा अधिक चुनौतीपूर्ण और संशोधित रूप प्रस्तुत किया गया है।

एक थैले में चार अलग-अलग अंक हैं। इन अंकों का उपयोग करके खाली स्थानों को भरें और चार अंकों की संख्याएँ बनाएँ।

(नोट : कोई भी अंक दो बार इस्तेमाल नहीं होना चाहिए)



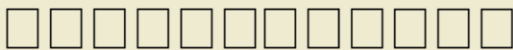
बनाई गई संख्याओं के बारे में निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सही है?

- (क) बनाई गई सभी संख्याएँ 3 से विभाजित होंगी।
- (ख) बनाई गई कुछ संख्याएँ 3 से विभाजित होंगी, लेकिन कुछ नहीं होंगी।
- (ग) बनाई गई कोई भी संख्या 3 से विभाजित नहीं होगी।

चित्र-5

चित्र-6 में दिए गए प्रश्न को हल करते हुए आपने कौन-से रोचक गुणधर्म देखे?

जॉन ने सभी खाली स्थानों को 5, 1, 2, 7 में से किसी एक अंक से भरा है। इस तरह उसने बारी-बारी से हर अंक को भरकर चार संख्याएँ बनाई हैं। बनाई गई संख्याओं के लिए इनमें से कौन-सा विकल्प सही है?



- (क) बनाई गई सभी संख्याएँ 12 से विभाजित होंगी।
- (ख) बनाई गई सभी संख्याएँ 2 से विभाजित होंगी।
- (ग) बनाई गई सभी संख्याएँ 3 से विभाजित होंगी।
- (घ) इनमें से किसी के बारे में पक्के तौर पर नहीं कहा जा सकता।

चित्र-6

प्राथमिक स्कूल के बच्चों के लिए भिन्न सम्बन्धी विभिन्न स्तरों के प्रश्न

किसी विषय में प्रवीणता का आकलन करने के लिए यह जरूरी है कि कठिनाई के अलग-अलग स्तरों वाले विविध प्रकार के प्रश्न पूछे जाएँ। किसी एक ही अवधारणा पर आधारित कई प्रश्न बनाना चुनौतीपूर्ण हो सकता है। साथ ही, हर प्रश्न में ऐसे तत्त्व होने चाहिए जो सम्भावित गलतफ़हमियों (गलत अवधारणाओं) या कठिनाइयों की पहचान करने में मदद करें। प्रश्नों को प्रस्तुत करने के तरीकों में विविधता लाकर और नए दृश्यों (visuals) को जोड़कर हम किसी विशिष्ट विषय पर प्रश्नों की एक विस्तृत शृंखला तैयार कर सकते हैं (देखें **चित्र-7**)। प्रश्न-1 से 10 भिन्न की अवधारणा के इर्द-गिर्द बनाए गए हैं और इनमें कठिनाई का स्तर अलग-अलग है। इनमें बहुविकल्पीय (MCQ) और इंटरैक्टिव ड्रैग-एंड-ड्रॉप प्रकार के प्रश्न शामिल हैं। (चूँकि यह उदाहरण डिजिटल माध्यम के हैं, अतः इनमें कई जगह ऐसे निर्देश दिए गए हैं जो कम्प्यूटर पर हल करते समय लागू होंगे। उन्हें यहाँ नज़रअन्दाज़ किया जा सकता है।)

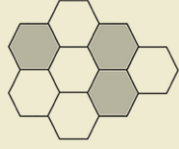
इनमें से प्रत्येक प्रश्न का एक विशेष उद्देश्य है। कुछ विकल्प भटकाने के लिए भी दिए गए हैं। **प्रश्न-1** इस बात पर केन्द्रित है कि क्या बच्चे यह समझते हैं कि भिन्नों को कैसे दर्शाया जाता है। **प्रश्न-2** इस समझ को जाँचने के लिए है कि दी गई आकृतियों में सभी हिस्से बराबर बँटे होना चाहिए और किसी भिन्न को दर्शाने वाले छायांकित हिस्से बाकी हिस्से के बराबर होने चाहिए।

भिन्नों से सम्बन्धित प्रश्नों को हल करने के दौरान कुछ बच्चों को यह भ्रम हो सकता है कि एक पूर्ण या सम्पूर्ण भाग को कैसे दर्शाया जाए। **प्रश्न-3** यह जानने के लिए बनाया गया है कि क्या बच्चे यह समझते हैं कि भिन्नों के सन्दर्भ में पूर्ण (या 'सम्पूर्ण') को कैसे दर्शाया जाता है।

हालाँकि **प्रश्न-4** काफ़ी सीधा और स्पष्ट प्रश्न है, फिर भी कई बच्चों को वस्तुओं के सन्दर्भ में भिन्नों को दर्शाने को लेकर गलतफ़हमियाँ होती हैं। इस प्रश्न में बच्चे शायद यह सोचकर 3/4 का चयन कर लें कि उन्हें नीले पेन की संख्या अंश के रूप में और लाल पेन की संख्या हर के रूप में लिखनी है।

दिलचस्प बात यह है कि किसी सममित आकृति को आधे में बाँटना किसी असममित आकृति को आधे में बाँटने से सरल होता है। **प्रश्न-5** एक इंटरैक्टिव प्रश्न है जिसे इस अवधारणा को समझाने के लिए तैयार किया गया है। **प्रश्न-6** गलतफ़हमी से जुड़ा प्रश्न है, जो यह परखता है कि क्या बच्चे यह समझते हैं कि 1/2 को सही ढंग से कैसे

प्रश्न-1 : कौन-सी भिन्न दी गई आकृति में छायांकित भाग को दर्शाती है?



- (क) $3/5$ (ख) $5/3$ (ग) $8/3$ (घ) $3/8$

प्रश्न-2 : दी गई आकृतियों में से किसमें $1/5$ भाग छायांकित है?



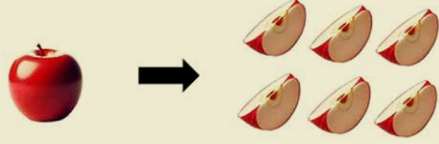
आकृति I



आकृति II

- (क) केवल आकृति I (ख) केवल आकृति II
(ग) आकृति I व आकृति II, दोनों (घ) कोई भी नहीं

प्रश्न-3 : एक सेब को 6 बराबर भागों में काटा गया है। कौन-सी भिन्न पूर्ण सेब को दर्शाती है?

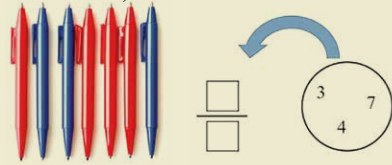


एक पूर्ण सेब

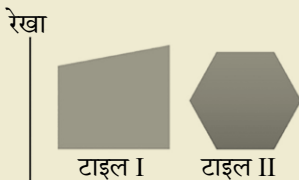
सेब के छह टुकड़े

- (क) $1/6$ (ख) $3/6$ (ग) $6/1$ (घ) $6/6$

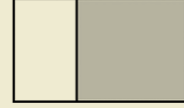
प्रश्न-4 : लाल रंग के 4 और नीले रंग के 3 पेन हैं। कुल पेन में नीले पेन का कितना भाग है? (गोले में से ड्रैग करके संख्याओं को खाली स्थानों में भरें।)



प्रश्न-5 : इनमें से कौन-सी टाइल को आसानी-से दो बराबर टुकड़ों में तोड़ा जा सकता है? (टाइल को बाँटने के लिए दी गई रेखा को घुमाएँ, खिसकाएँ और टाइल पर रखें।)



प्रश्न 6. क्या चित्र में दर्शाई गई पूर्ण आकृति का $1/2$ भाग छायांकित है?



- (क) हाँ (ख) नहीं

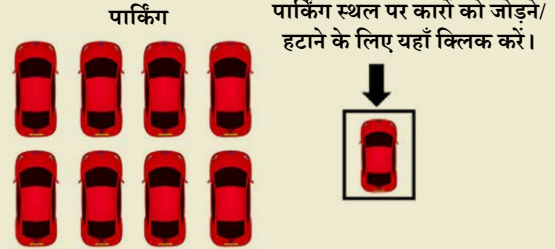
प्रश्न-7 : किसने ज़्यादा डोसा खाया?



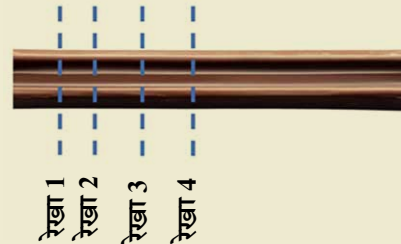
बेन ने ऊपर दिखाए गए डोसे का $1/2$ भाग खाया।
जॉन ने ऊपर दिखाए गए डोसे का $1/2$ भाग खाया।

- (क) बेन (ख) जॉन
(ग) बेन और जॉन, दोनों ने बराबर डोसा खाया

प्रश्न-8 : चित्र पार्किंग स्थल से आधी कारें जाने के बाद के दृश्य को दर्शाता है। शुरुआत में वहाँ कितनी कारें पार्क की गई थीं? (कारों को जोड़ने के लिए टैब पर लेफ्ट-क्लिक करें और हटाने के लिए राइट-क्लिक करें।)



प्रश्न-9 : चॉकलेट को तीन बराबर हिस्सों में बाँटने के लिए पहला कट किस रेखा पर करना चाहिए?



- (क) रेखा 1 (ख) रेखा 2 (ग) रेखा 3 (घ) रेखा 4

प्रश्न-10 : लगभग _____ गिलास पानी से भरा हुआ है।



(सही विकल्प चुनकर ऊपर दिए गए खाली स्थान को भरें।)

- (क) $4/8$ (ख) $2/3$ (ग) $3/4$ (घ) $1/4$

दर्शाया जाए। कई बार बच्चे बतौर उत्तर 'हाँ' का विकल्प चुन लेते हैं क्योंकि वे सोचते हैं कि आकृति को दो भागों में बाँटा गया है। लेकिन वे इस बात पर ध्यान देने से चूक जाते हैं कि ये दोनों भाग समान होने चाहिए।

यह सोचने की बात है कि क्या समान आकृति की दो अलग-अलग माप की दो वस्तुओं का आधा भाग बराबर होता है। प्रश्न-7 इस विचार को समझाने की कोशिश करता है कि संख्यात्मक रूप से आधे भाग बराबर होते हैं। लेकिन अलग-अलग माप की दो समान आकृति की वस्तुओं के आधे हिस्से आपस में बराबर नहीं होते। प्रश्न-8 एक इंटरैक्टिव प्रश्न है, जो यह पड़ताल करता है कि अगर हमें किसी संख्या का आधा पता हो, तो क्या हम पूरी संख्या का पता लगा सकते हैं।

अक्सर हमसे किसी वस्तु का एक-तिहाई भाग निकालने के लिए कहा जाता है। लेकिन प्रश्न-9 में इस बात पर विचार करना दिलचस्प हो जाता है कि अगर हमें किसी वस्तु

का एक-तिहाई हिस्सा चाहिए, तो पहला कट कहाँ करना चाहिए। प्रश्न-10 भिन्नो के अनुमान से जुड़ा हुआ है।

हमने एक ही अवधारणा के इर्द-गिर्द रचे गए कई प्रश्नों को देखा। यह प्रश्न न केवल बच्चों की भिन्नो की समझ को परखते हैं, बल्कि किसी विशिष्ट प्रश्न को हल करते समय ज्यादा गहराई से सोचने के लिए उन्हें प्रेरित भी करते हैं।

निष्कर्ष

प्रश्नों की रचना बच्चों को सीखने के विविध लक्ष्यों तक पहुँचाने में महत्वपूर्ण भूमिका निभाती है। इस बात की बहुत सम्भावना है कि विभिन्न प्रकार के प्रश्नों को इस तरह तैयार किया जाए कि वे कई तरह के शैक्षिक उद्देश्यों को पूरा कर सकें। आकलन का उद्देश्य केवल बच्चों के ज्ञान की जाँच करना नहीं होना चाहिए, बल्कि उसमें ऐसे प्रश्न भी शामिल होने चाहिए जो उनकी सोच को चुनौती दें और उनकी जिज्ञासा को जगाएँ।



शेखर मोहम्मद ज़ाहिद बेंगलूरु में स्थित ओपन डोर एजूकेशन में सीनियर प्रोडक्ट डेवलपर हैं। वे गणित-शिक्षा और खेल आधारित अधिगम में खासी दिलचस्पी रखते हैं। उनसे shekhmohammedzahid@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : कविता तिवारी पुनरीक्षण : प्रतिका गुप्ता

THOAN

तीन अंकों की संख्या

तीन अंकों की एक संख्या abc सोचें। अब पहले अंक a को आखिर में ले जाएँ ताकि यह संख्या bca का अन्तिम अंक बन जाए। अब इस नई संख्या को पुरानी संख्या में से घटाएँ।

उदाहरण के लिए, यदि पहली संख्या abc 356 है, तो नई संख्या bca 563 होगी। अब, 356 में से 563 घटाएँ। मेरा दावा है कि यदि मुझे मूल संख्या का पहला अंक और दोनों संख्याओं के बीच का अन्तर मालूम हो, तो मैं उस संख्या का अनुमान लगा सकता हूँ। (मसलन यदि मुझे मालूम है कि अन्तर 207 है और पहला अंक 3 है तो मैं अनुमान लगा सकता हूँ कि मूल संख्या 356 थी।)

क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि मैं यह कैसे करता हूँ? इसे तीन अंकों की अन्य संख्याओं के साथ आजमाएँ और अपने जवाब AtRightAngles.editor@apu.edu.in पर भेजें।

एट राइट एंगल्स के आगामी अंकों में आपको यतिराज शर्मा की और भी दिलचस्प THOAN गतिविधियाँ देखने को मिलेंगी, तो नज़र बनाए रखें।

पैटर्न की खोज :

कक्षा-2 में संख्याओं से सीखना

जागृति मेहरा

कक्षा-2 में, विद्यार्थियों को संख्या पैटर्न की आकर्षक दुनिया से परिचित कराया जाता है। ये पैटर्न अनुक्रम पहचानने, संख्याओं के बीच सम्बन्ध समझने के महत्वपूर्ण कौशल विकसित करने में और गणितीय कौशल बढ़ाने में उनकी मदद करते हैं। इसे सिखाने का एक दिलचस्प तरीका होता है अभ्यास के माध्यम से सिखाना, जिसमें विद्यार्थी पैटर्न पहचानने के लिए खाली स्थान के चारों ओर संख्याओं का उपयोग करके ग्रिड में दिए गए खाली स्थान भरते हैं। इस लेख में, हम यह पता लगाएँगे कि विद्यार्थी इन पैटर्न को कैसे पहचान सकते हैं, तालिकाओं का उपयोग कैसे कर सकते हैं और 1 से 100 तक की संख्याओं से जुड़े अभ्यासों के माध्यम से अपने सोच-विचार के कौशल को कैसे विकसित कर सकते हैं।

सरल अनुक्रम पहचानना

इस गतिविधि में विद्यार्थियों द्वारा चित्र-1 में दिए गए 10×10 संख्या ग्रिड के पैटर्न का उपयोग किया जाता है।

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16		10 less		20
21	22	23	24	25	26	1 less	28	1 more	30
31	32	33	34	35	36		10 more		40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

चित्र-1 : एक 10×10 का संख्या ग्रिड

सरल अनुक्रमों (sequence) के माध्यम से संख्या पैटर्न

समझना शुरू करने का सबसे आसान तरीका है। इसमें विद्यार्थियों को संख्याओं की शृंखला में आ रहे खाली स्थान भरना होते हैं। यहाँ ऊपर दिए गए ग्रिड से एक उदाहरण दिया गया है :

उदाहरण-1

	24	
--	----	--

पैटर्न सीधा है। संख्याएँ 1 इकाई से आगे बढ़ रही हैं : 23, 24, 25। इसलिए खाली स्थान भरने पर क्रम इस तरह दिखता है :

23	24	25
----	----	----

लेकिन अगर संख्याएँ अलग दिशा में आगे बढ़ें तो क्या होगा? या अगर हमें दी गई संख्या के ऊपर या नीचे की संख्याएँ पता करनी हों तो क्या होगा?

ऊपर या नीचे की संख्याएँ पता करना : स्थान सम्बन्धी सोच विकसित करना

तो आइए इस विचार को एक कदम आगे ले जाएँ और 1 से 100 तक की संख्याओं की तालिका में किसी विशिष्ट

की-वर्ड : संख्याएँ, पैटर्न, अनुक्रम, सम्बन्ध, नियम, सम्प्रेषण

संख्या के ऊपर और नीचे की संख्याओं के बारे में सोचें।

उदाहरण-2

संख्या 14 को देखिए। इसके ठीक ऊपर और नीचे कौन-कौन-सी संख्याएँ होनी चाहिए?

14

विद्यार्थी सीधे संख्या ग्रिड को देखकर उत्तर दे सकते हैं। लेकिन जब मैंने उन्हें संख्या ग्रिड देखे बिना जवाब देने को कहा, तब भी वे सही संख्याएँ 4 और 24 बताने में सक्षम थे। लेकिन दिलचस्प बात यह थी कि उन्हें अपने उत्तरों के पीछे का कारण बताने में संघर्ष करना पड़ रहा था।

अन्ततः वे इस नतीजे पर पहुँचे कि “4, 14 से 10 कम है” और “24, 14 से 10 अधिक है।”

जब विद्यार्थी यह प्रक्रिया अलग-अलग संख्याओं के साथ दोहराते हैं, तो वे यह देखना शुरू कर देते हैं कि तालिका संख्याओं का एक ऐसा ग्रिड बनाती है, जिनमें संख्याओं के बीच के सम्बन्धों का अनुमान लगाया जा सकता है। स्थान सम्बन्धी सोच एक व्यवस्थित स्थान में वस्तुओं, संख्याओं या पैटर्न को देखने और उनमें हेर-फेर करने की क्षमता है। 1 से 100 की ग्रिड में ऊपर और नीचे की संख्याओं की पहचान करने के सन्दर्भ में, स्थान सम्बन्धी सोच विकसित होती है क्योंकि विद्यार्थी संरचित व्यवस्था में उनकी स्थिति के आधार पर संख्यात्मक सम्बन्धों को मानसिक रूप से व्यवस्थित करना और उनकी व्याख्या करना शुरू करते हैं। इस स्थान सम्बन्धी व्यवस्था को समझने से इस बात की गहरी समझ विकसित करने में मदद मिलती है कि संख्याओं के आपस में सम्बन्ध कैसे हैं।

छूटी संख्याओं वाले अनुक्रमों को समझना : अधिक जटिल पैटर्न

उदाहरण-3

20		
----	--	--

दिए गए उदाहरण-3 में, विद्यार्थी अगली संख्या 21 भर सकते हैं, लेकिन यह पिछले उदाहरण की तरह स्पष्ट नहीं है

क्योंकि दी गई संख्या ग्रिड में 20 पंक्ति के सबसे अन्त में है और इसके दाईं ओर कोई संख्या नहीं है। इस अनुक्रम को वास्तव में समझने के लिए, विद्यार्थियों को यह ध्यान देने की आवश्यकता है कि संख्याएँ हर बार 1 बढ़ रही हैं, जिससे एक सरल पैटर्न बन रहा है।

20	21	22
----	----	----

इस तरह का अनुक्रम विद्यार्थियों को यह सोचने के लिए प्रोत्साहित करता है कि संख्याएँ एक-दूसरे के आगे-पीछे किस तरह से आती हैं और संख्याओं की शृंखला को आगे कैसे बढ़ाया जा सकता है। यह उन्हें संख्या ग्रिड से स्वतंत्र करता है।

कुछ शृंखलाओं के बारे में सोचना और समझना मुश्किल होता है? उदाहरण के लिए, जब विद्यार्थियों को इस तरह की संख्याएँ दी जाती हैं -

उदाहरण-4

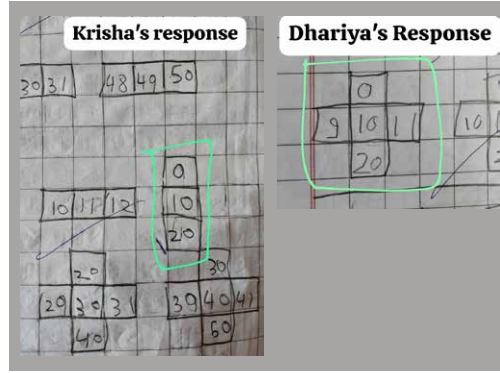
	30	
--	----	--

उदाहरण-5

10

वे सवाल करना शुरू कर सकते हैं कि आगे क्या आएगा। अक्सर, विद्यार्थी खाली स्थान को भरने के लिए अलग-अलग रणनीतियाँ आजमाते हैं और यहाँ स्थान सम्बन्धी सोच की खूबी सामने आती है। मैंने देखा कि कुछ विद्यार्थियों ने इसे खाली छोड़ दिया लेकिन अन्य विद्यार्थियों ने इसे अन्ततः हल कर लिया।

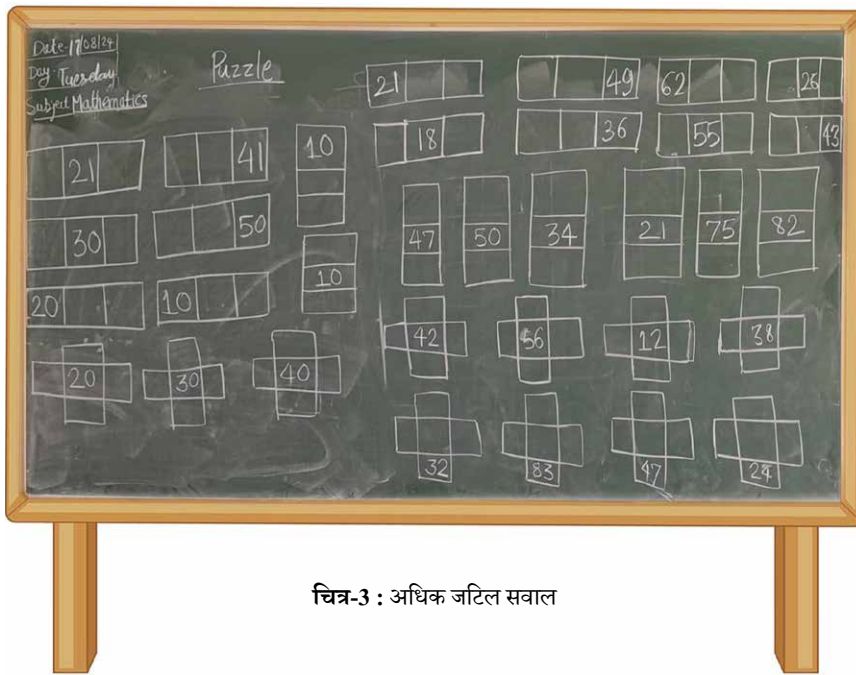
0
10
20



चित्र-2 : विद्यार्थियों के जवाब

1 से 100 तक की संख्याओं की तालिका को एक लचीले साधन में बदलना

यहाँ वे पहेलियाँ दी गई हैं जिन पर विद्यार्थियों ने काम किया



चित्र-3 : अधिक जटिल सवाल

बोर्ड पर इतने सारे प्रश्न मैंने यह अवधारणा प्रस्तुत करने के पहले ही दिन नहीं लिख दिए थे। मैंने विद्यार्थियों को पहले ही इस विषय से परिचित कर दिया था और शुरुआत सरल अवधारणा से की थी। जैसे कि किसी दी गई संख्या से पहले और बाद में आने वाली संख्याओं की पहचान करना। फिर हम इन संख्याओं से सरल पहेलियाँ बनाने की ओर बढ़े। धीरे-धीरे, मैं पहेलियाँ मुश्किल करती चली गईं, लेकिन हमने '1 कम या 1 अधिक' या '10 कम या 10 अधिक' के तर्क पर स्पष्ट रूप से चर्चा नहीं की थी।

मैंने पहले कभी इतने जटिल प्रश्न नहीं दिए थे। बहरहाल, एक पर्यवेक्षक ने मुझे बोर्ड पर यह उदाहरण आजमाने के लिए प्रोत्साहित किया। मुझे आश्चर्य हुआ कि कई विद्यार्थी अपने तर्क के साथ उनका उत्तर देने में सक्षम थे। बेशक, कुछ विद्यार्थी अभी भी मुश्किल में थे और कुछ ने इस तर्क के साथ जवाब दिया कि 'इनके आस-पास कोई संख्या नहीं है,' जो अपने आप में एक उचित अवलोकन है।

एक नज़र में, 1 से 100 तक की संख्याओं की तालिका कॉम्पैक्ट लग सकती है और इसे आसानी से सिर्फ एक तयशुदा ग्रिड के रूप में देखा जा सकता है। लेकिन जैसे-जैसे विद्यार्थी पैटर्न समझते और तलाशते हैं, वे अपनी ज़रूरतों के हिसाब से इस ग्रिड को 'बदलना' शुरू कर देते हैं। उदाहरण के लिए, जब अनुक्रम 20, 21, 22 का सामना होगा, तो कई विद्यार्थी कह

सकते हैं : “रुकिए, यह ग्रिड एक पंक्ति में केवल 10 संख्याएँ क्यों दिखाती है?”

सोच में यह बदलाव एक महत्वपूर्ण कौशल है जिसमें संख्या ग्रिड अब अटल या पत्थर की लकीर नहीं लगती। इन अभ्यासों के अन्त तक विद्यार्थी समझ जाते हैं कि पैटर्न सिर्फ संख्याओं को देखने के एक ही तरीके तक सीमित नहीं हैं। वे जिस सन्दर्भ में काम कर रहे हैं उसके आधार पर उन्हें बदल सकते हैं और समायोजित कर सकते हैं।

इस सामग्री का दायरा

- यह गतिविधि विद्यार्थियों को विभिन्न अवधारणाओं (जैसे बढ़ते और घटते क्रम, पूर्ववर्ती और परवर्ती संख्या) आदि को समझने में मदद करती है।
- जैसे-जैसे विद्यार्थी ऊर्ध्वाधर और क्षैतिज पैटर्न के साथ पक्के होते जाते हैं, हम विकर्ण पैटर्न उनके सामने रख सकते हैं। इससे बाद में उन्हें गुणन सारणी को पहचानने में मदद मिल सकती है।
- उच्च क्रम चिन्तन कौशल (Higher Order Thinking Skills) गतिविधि के लिए सुझाव है कि शिक्षक इस ग्रिड में स्तम्भों की संख्या को 20 स्तम्भ (या बाद में 15 स्तम्भ) में कर दें और विद्यार्थियों को संख्याओं के बीच सम्बन्ध देखने के लिए कहें। उन्हें (अन्ततः) यह देखने में सक्षम होना चाहिए कि बाईं या दाईं ओर संख्याएँ अभी भी क्रमशः 1 से घटती या बढ़ती हैं, जबकि ऊपर या नीचे संख्याएँ क्रमशः 20 (या 15) से घटती या बढ़ती हैं। बेशक, विकर्ण पैटर्न और भी जटिल होंगे!

ज़रूरी गणितीय और सोच कौशल विकसित करना

संख्या पैटर्न कक्षा-2 के गणित का एक आधारभूत हिस्सा है। जैसे-जैसे विद्यार्थी खाली स्थान भरना शुरू करते हैं, ऊपर और नीचे की संख्याएँ ढूँढ़ते हैं और अनुक्रम में अगली संख्या की पहचान करते हैं, वे संख्याओं और उनके सम्बन्धों की एक मज़बूत समझ विकसित करते हैं। यह गतिविधियाँ न केवल उन्हें अंकगणित का अभ्यास करने में मदद करती हैं,

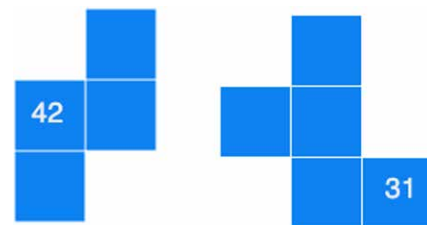
बल्कि महत्वपूर्ण समस्या-समाधान कौशल और स्थान को ध्यान में रखकर सोचने की क्षमता को भी बढ़ावा देती हैं।

20, 21, 22 के उदाहरण में, विद्यार्थियों को एहसास होता है कि संख्याएँ सिर्फ एक अटल ग्रिड से बँधी हुई नहीं होती हैं; वे ग्रिड को नई शृंखलाएँ बनाने के लिए बड़ा कर सकते हैं या बदल सकते हैं। संख्या पैटर्न और स्थान सम्बन्धों की यह खोज विद्यार्थियों को उनकी सोच में अधिक लचीला बनने में मदद करती है – जो गणित और रोज़मर्रा के समस्या-समाधान का एक आवश्यक कौशल होता है।

जैसे-जैसे वे अभ्यास और अन्वेषण करते रहेंगे, वे पैटर्न की पहचान करने और बनाने की अपनी क्षमता के प्रति अधिक आश्वस्त होते जाएँगे, जिससे आने वाले वर्षों में अधिक उन्नत गणितीय अवधारणाओं की नींव रखी जा सकेगी।

सम्पादक की टिप्पणी

इस लेख में प्रस्तुत अवधारणाओं को बच्चों के लिए अधिक चुनौतीपूर्ण समस्याएँ और गतिविधियाँ देने के लिए विस्तारित किया जा सकता है। विद्यार्थियों को ट्रायोमिनो, टेट्रोमिनो और यहाँ तक कि पेंटोमिनो से भी परिचित कराया जा सकता है। इनसे परिचित कराने के लिए इनसे जुड़े सवालियों की एक आकर्षक वर्कशीट बनाई जा सकती है। उदाहरण के लिए, एक वर्कशीट में विद्यार्थियों से दिए गए पैटर्न (जैसा कि नीचे दिखाया गया है) के खाली स्थान भरने और उनके उत्तरों के लिए तर्क देने के लिए कहा जा सकता है।



दूसरा, इस लेख में गतिविधि केवल 1 इकाई और 10 इकाइयों के जोड़ और घटा पर केन्द्रित है। अन्य इकाइयों के साथ जोड़ और घटा को शामिल करके इसे बढ़ाया जा सकता है, जिससे बच्चों को स्किप काउंटिंग और रिवर्स स्किप काउंटिंग का अभ्यास करने का मौका मिलेगा।



जागृति मेहरा जून 2023 से अजीम प्रेमजी स्कूल, सिरौही, राजस्थान में शिक्षिका हैं। उनके पास राजस्थान केन्द्रीय विश्वविद्यालय से गणित में एकीकृत एमएससी, बीएड की डिग्री और श्री वैष्णव इंस्टीट्यूट ऑफ मैनेजमेंट, इन्दौर से कम्प्यूटर साइंस में स्नातक की डिग्री है। उनकी शिक्षण यात्रा में जवाहर नवोदय विद्यालय, नीमच में छह महीने की इंटर्नशिप और आरटीईटी और सीटीईटी के प्रमाणपत्र शामिल हैं। वे हमेशा प्रभावशाली शिक्षण अनुभव सम्भव बनाने में योगदान देने के लिए उत्सुक रहती हैं। जागृति से jagrati.mehra@azimpremjifoundation.org पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : सुबोध जोशी **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय

मॉण्टेसरी का तरीका : चुनिन्दा सामग्रियों का परिचय और उन्हें फिर से कैसे बनाया जाए (भाग 2)

क्षमा चक्रवर्ती

आपने कभी सोचा है कि रोजमर्रा की चीजें कैसे किसी बच्चे में छिपी सम्भावनाओं को सामने ला सकती हैं? मॉण्टेसरी का जादू अपने घर में लाने के लिए कम लागत वाले तरीके इस लेख में बताए गए हैं। साथ ही ऐसी पद्धति के फ़ायदे भी बताए गए हैं जो आज़ादी, रचनात्मकता और सीखने के प्रति ज़िन्दगी भर के प्यार को बढ़ावा देती है।

शीर्षक से स्पष्ट है कि मॉण्टेसरी सामग्रियों की दो-भाग की शृंखला में यह दूसरा लेख है। इस शृंखला में कुल छह मॉण्टेसरी सामग्रियों को शामिल किया गया है। 'एट राइट एंगल्स' नवम्बर, 2024 में प्रकाशित पहले भाग में सामग्री 1-4 यानी गुलाबी टावर, भूरे रंग की सीढ़ियाँ, लम्बी छड़ें और संख्या वाली छड़ें [1] शामिल थीं। इस लेख में घुंडी वाले बेलनाकार ब्लॉक (cylinder blocks) और बिना घुण्डी वाले बेलनाकार ब्लॉक (knobless cylinders) शामिल हैं।

मॉण्टेसरी पाठ्यचर्या में अध्ययन के पाँच प्रमुख क्षेत्र शामिल हैं : व्यावहारिक जीवन, संवेदी, गणित, भाषा और संस्कृति। इनमें से हर क्षेत्र के लिए मॉण्टेसरी की सामग्रियों का एक सेट है, जो किसी ख़ास ज्ञान या कौशल के बारे में है। इस लेख में हम कुछ संवेदी सामग्रियों पर गौर करेंगे, ख़ासतौर पर ऐसी सामग्रियाँ जो देखने पर फ़र्क को बताती हैं जैसे पतली, मोटी, लम्बी, छोटी। आप जैसे-जैसे पढ़ते जाएँगे, आपको एहसास होगा कि इन सामग्रियों में बहुत कुछ है – गणित, भाषा, विवरण पर ध्यान और ऐसा बहुत कुछ जो आपस में गुँथा हुआ है! उम्मीद है कि इससे आपको यह आभास होगा कि इन सामग्रियों के साथ कक्षा में क्या किया जा सकता है

और इनका इस्तेमाल करने पर किस तरह के नतीजों की उम्मीद की जा सकती है।

सामग्री-5 : बेलनाकार ब्लॉक

बेलनाकार ब्लॉक के 4 सेट हैं। हर सेट में 10 बेलनाकार ब्लॉक हैं। इन्हें एक खाँचेदार पटिए में रखा गया है। पटिए में हर ब्लॉक को रखने के लिए एक खाँचा है। एक सेट में, बेलनाकार ब्लॉक बड़े से छोटे के क्रम में रखे गए हैं (चित्र-1 नीचे का सेट)। दूसरे में उन्हें मोटे से पतले के क्रम में रखा गया है (चित्र-1 बायाँ सेट)। तीसरे में उन्हें मोटे और छोटे से पतले और लम्बे के क्रम में रखा गया है (चित्र-1 ऊपर का सेट)। चौथे सेट में उन्हें लम्बे से छोटे क्रम में रखा गया है (चित्र-1 दायाँ सेट)।



चित्र-1

की-वर्ड : मॉण्टेसरी, टीएलएम, क्रिफ़ायती सामग्री, खुद करें



चित्र-2 : ब्लॉक को घुण्डी से पकड़ना बच्चों को पेंसिल पकड़ने के लिए भी तैयार करता है।

इस्तेमाल कैसे करें : उपरोक्त क्रम में बच्चों को अलग-अलग बेलनाकार ब्लॉकों के सेट के बारे में एक-एक करके जानकारी दी जाती है। बच्चा पट्टिए को चटाई पर रखता है और सभी बेलनाकार ब्लॉकों को उनके खाँचों में से निकाल देता है। ब्लॉकों को बेतरतीब ढंग से बिखेर दिया जाता है। अब बच्चे से उन्हें वापस सही खाँचों में रखने को कहा जाता है। ध्यान दें कि बच्चा ब्लॉकों को गलत तरीके से रख दे या कुछ खाँचों को खाली छोड़ दे तो यह गतिविधि वहीं खत्म नहीं हो जाती है। अगले सेट पर तभी बढ़ा जाए, जब बच्चा इस सेट के सभी ब्लॉकों को सही ढंग से रखने लगे। इसके लिए वह शुरुआत में कोशिश करेगा और गलतियाँ करेगा। यह एक उदाहरण है जो बताता है कि कैसे मॉण्टेसरी सामग्री खुद-ब-खुद सुधार करवाती है।

यहाँ इस बात पर भी ध्यान दें कि इस तरह की गतिविधियाँ बच्चे को पेंसिल पकड़ने और पेशीय कौशल (motor skills) को विकसित करने के लिए तैयार करने में मदद करती हैं। सामग्री को बनाने में इस तरह की छोटी-छोटी दिखने वाली बातों पर ध्यान दिया जाता है। (चित्र-2)

अतिरिक्त गतिविधियाँ

गतिविधि-1 : जब बच्चा आसानी से बेलनाकार ब्लॉकों को सही ढंग से रखने लगे, तो खाँचेदार पट्टिए हटा दिए जाते हैं और ब्लॉकों को चटाई पर बेतरतीब ढंग से रखा जाता है। अब बच्चे को उन्हें बढ़ते या घटते क्रम में जमाने के लिए कहा जाता है। यहाँ बच्चे के पास खाँचेदार पट्टिया नहीं हैं जिससे उसे ब्लॉकों की सही स्थिति में जमे होने का पता चल पाए। बच्चे को एक बार में एक सेट ही दिया जाता है।

गतिविधि-2 : दो पट्टियों के ब्लॉक सेट (उदाहरण के लिए, बड़े से छोटे और मोटे से पतले वाले) को अँग्रेजी के L-आकार में जमाया जाता है। दोनों सेट से सभी ब्लॉकों

को निकालकर मिला दिया जाता है। अब बच्चे को उनमें से हर ब्लॉक को उसकी सही जगह पर रखने के लिए कहा जाता है। यह गतिविधि 3 सेटों के साथ दोहराई जाती है और आखिरकार सभी 4 सेटों के साथ की जाती है। यह छह साल के बच्चों के लिए ज़्यादा मुनासिब होगी।

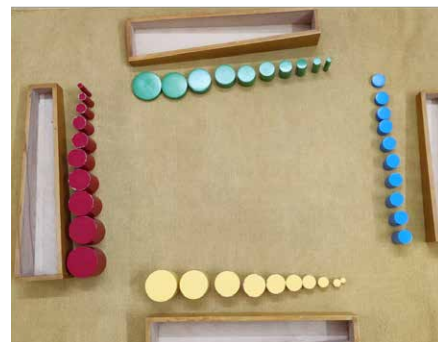
गतिविधि-3 : ब्लॉकों को एक ट्रे में रखकर दूसरे कमरे में रख दिया जाता है। किसी एक खाँचे में एक संकेतक रख दिया जाता है (कुछ न हो तो पेंसिल का इस्तेमाल किया जा सकता है)। विद्यार्थी को कहा जाता है कि जिस खाँचे में संकेतक रखा हुआ है, उस खाँचे में रखने के लिए सही ब्लॉक ट्रे में से चुनकर लाए। इस गतिविधि में ब्लॉक के आयाम देखकर उसकी पहचान करना, उस पहचान को याद रखना और ट्रे से सही ब्लॉक की पहचान करना शामिल है। अगर शुरुआत में बच्चे को कई बार कोशिश करनी पड़ती हो तो उन्हें ऐसा करने की इजाज़त दी जाती है।



चित्र-3 : गतिविधि-3

सामग्री-6 : बिना घुण्डी के बेलनाकार ब्लॉक

बेलनाकार ब्लॉकों का एक बदला हुआ रूप बिना घुण्डी के ब्लॉक (या रंगीन ब्लॉक) हैं। ये पहले के ब्लॉकों के जैसे ही हैं, लेकिन इनको रखने के लिए खाँचे या पकड़ने के लिए घुण्डियाँ नहीं होती हैं। ये 4 रंगों में होते हैं – लाल (मोटे से पतले,



चित्र-4



चित्र-5

एक जैसी ऊँचाई), पीले (बड़े से छोटे), हरे (छोटे और मोटे से लम्बे और पतले) और नीले (लम्बे से छोटे, एक जैसा व्यास); ये चित्र-4 में दिखाए गए हैं।

इनके साथ भी बेलनाकार ब्लॉकों के लिए बताई गई गतिविधियों जैसी ही गतिविधियाँ की जा सकती हैं। बेलनाकार ब्लॉकों के हर सेट का मिलान रंगीन गुटकों के साथ भी किया जा सकता है।

रंगीन ब्लॉकों से मीनार बनाई जा सकती हैं क्योंकि इनमें घुण्डियाँ नहीं होती हैं (इसे बच्चे खुद भी देखकर समझ लेंगे!)। यह बच्चों के लिए ध्यान, धैर्य और सन्तुलन की समझ बढ़ाने का बढ़िया अभ्यास है। चित्र-5 में रंगीन ब्लॉकों के दो सेट दिखाए गए हैं। इनमें हरे वाले ब्लॉक मोटे और छोटे तथा पतले और लम्बे के क्रम में हैं और पीले वाले ब्लॉक बड़े से छोटे के क्रम में। इन्हें बारी-बारी से रखा जाना चाहिए। ऐसा करने से हरे-पीले ब्लॉक के एक जोड़े पर अगला जोड़ा रखने के लिए आधार मिलेगा।

अगर हम किसी भी बेलनाकार ब्लॉक के आयामों को बदलते हैं तो ठीक चार सम्भावनाएँ बनती हैं :

1. समान ऊँचाई, बदलती मोटाई (व्यास) – लाल
2. समान मोटाई (व्यास), बदलती ऊँचाई – नीला
3. ऊँचाई और मोटाई (व्यास) दोनों में बढ़ोतरी – पीला
4. ऊँचाई में बढ़ोतरी और मोटाई में कमी – हरा

यह ताज्जुब की बात है कि बरसों पहले डॉ. मारिया मॉण्टेसरी के ज़हन में इन सभी सम्भावनाओं की यह पूरी व्याख्या कैसे आई होगी। इस तरह से समग्र रूप में देखने पर किसी शिक्षार्थी में ऐसी गलत धारणाएँ नहीं बन पाती हैं, कि जो बड़ा है वह मोटा होता है या जो आकार में छोटा है वह लम्बाई में भी छोटा होता है या जो पतला है वह छोटा होता है!

पिछले लेख की तरह, हम आपके लिए इन मॉण्टेसरी सामग्रियों को बनाने के ऐसे कम लागत के तरीके के बारे में भी बता रहे हैं, जिनमें सटीकता या गुणवत्ता से कोई समझौता नहीं होता है। चित्र-6 देखें। इसमें बिना घुण्डी के बेलनाकार ब्लॉक बनाने के आसान चरण बताए गए हैं। इसमें लगने

वाली सामग्री तथा अन्य विवरणों के लिए अन्त में दिए गए सन्दर्भ [2] के लिंक पर जाएँ। उस लिंक पर बेलनाकार ब्लॉक के ऐसे खोखे भी दिए गए हैं, जिन्हें आप A3 शीट पर प्रिंट करके फ़ौरन ही काम में ले सकते हैं!



चित्र-6

मॉण्टेसरी सामग्री (खरीदी गई या बनाई गई) को बच्चे के सीखने के माहौल में शामिल करके हम ऐसा शैक्षिक नज़रिया अपना रहे हैं जो स्वावलम्बन या आज़ादी, खुद करके खोजने और हर बच्चे के कुदरती विकास को सम्मान देने को आगे रखता है।

मॉण्टेसरी शिक्षा न सिर्फ़ संज्ञानात्मक विकास को बढ़ावा देती है बल्कि समस्या-समाधान करने, ज़िम्मेदारी लेने और आत्मविश्वास जैसे महत्वपूर्ण जीवन कौशलों को भी बढ़ावा देती है। खुद से बनाई जाने वाली सामग्रियों की खूबसूरती यह है कि वे मॉण्टेसरी शिक्षा के दर्शन को ज़्यादा सुलभ बनाती हैं, जिससे शिक्षक, परिवार और अध्यापक (educator) गुणवत्ता या मक़सद से समझौता किए बिना अपनी ज़रूरतों के मुताबिक़ शिक्षण के उपकरण बना सकते हैं। इन सामग्रियों को अपने घर या कक्षा का हिस्सा बनाकर हम जिज्ञासु, आत्मविश्वासी और क़ाबिल बच्चों की पीढ़ी को विकसित करने की दिशा में महत्वपूर्ण क़दम उठाते हैं।

हमारी गुज़ारिश है कि आप इन्हें आज़माएँ और अपने अनुभव हमारे साथ साझा करें। अपनी बनाई सामग्रियों की तस्वीरें हमें भेजें और हमें बताएँ कि आपके विद्यार्थियों के साथ कक्षा में आपका अनुभव कैसा रहा! आप हमें atrightangles.editor@apu.edu.in पर लिख सकते हैं।

आभार : इस लेख को सुश्री सुधा राव, पारिजात मॉण्टेसरी, बेंगलूरु और स्वाती सरकार, अजीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी, बेंगलूरु के सुझावों को ध्यान में रखते हुए लिखा गया है।

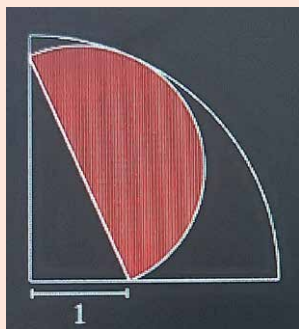
References

1. Montessori Materials Part 1 <https://bit.ly/3PHeZy9>
2. How to make the cylinders <https://bit.ly/3PHf3hn>

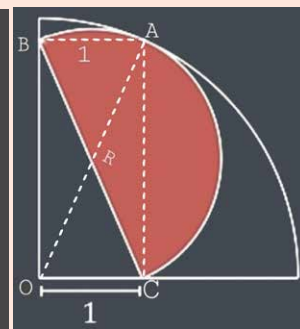


क्षमा चक्रवर्ती एक अध्यापक (educator) हैं। उन्होंने आईआईटी मद्रास से गणित में स्नातकोत्तर की उपाधि और अजीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी से शिक्षा में स्नातकोत्तर की उपाधि हासिल की है। गणित की शिक्षा में 15 से अधिक वर्षों के अनुभव के साथ, उन्होंने सामग्रियों के विकास, शिक्षण और शिक्षक प्रशिक्षण जैसे क्षेत्रों में काम किया है, साथ ही विद्यार्थियों के साक्षात्कार किए हैं और मूल्यांकन तैयार किए हैं। क्षमा में युवा मनोमस्तिष्क को विकास के रास्ते पर ले जाने का जुनून है। उन्हें छोटे बच्चों के साथ समय बिताना और कुदरत का आनन्द लेना भाता है। उनसे kshamagc@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : हिमालय तहसीन **पुनरीक्षण :** सुशील जोशी **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय



पीएम श्री केन्द्रीय विद्यालय पालमपुर, हिमाचल प्रदेश के कक्षा 12 के विद्यार्थी पाठक निखिल कुमार ने एट राइट एंगल्स, नवम्बर 2024 के अंक में पृष्ठ 54 पर प्रकाशित लाल क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने की समस्या का समाधान भेजा है।



हल :

मान लीजिए कि O चौथाई वृत्त (त्रिज्या R) का केन्द्र है और A वह बिन्दु है जिस पर लाल अर्धवृत्त (त्रिज्या r) बड़े चौथाई वृत्त को स्पर्श करता है। मान लीजिए BC लाल अर्धवृत्त का व्यास है।

चूँकि BC लाल अर्धवृत्त का व्यास है, इसलिए A पर अंतरित कोण 90° होना चाहिए। इसलिए, यदि हम C पर OC के लम्बवत एक रेखा खींचते हैं, तो उसे A से होकर गुजरना होगा। इसलिए $OCAB$ एक आयत है।

तो $AB = OC = 1$, $OB = AC$ और $OA = R$

पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार, ΔOAB में, $OB^2 = OA^2 - AB^2 = R^2 - 1$ और ΔABC ,
 $(2r)^2 = AB^2 + AC^2 = 1 + OB^2 = 1 + R^2 - 1 = R^2$.

इसलिए हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $2r = R$

$$r = \frac{R}{2}$$

$$\text{लाल क्षेत्र का क्षेत्रफल} = \pi \frac{R^2}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi R^2}{8}$$

(नोट: चूँकि आयत के विकर्ण बराबर होते हैं, इसलिए सीधे $OA = R = BC = 2r$ पर पहुँचना सम्भव है।)

चक्के में चक्का : संख्या पहियों के माध्यम से गणित

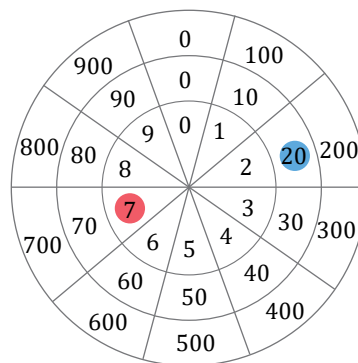
राजकुमार कनोजिया

जोड़ना-घटाना जैसी बुनियादी संख्या संक्रियाओं पर महारत हासिल करना प्रारम्भिक गणित को सीखने का एक महत्वपूर्ण भाग है। इसके लिए दोहराव और अभ्यास तो ज़रूरी हैं ही, लेकिन इन कौशलों को सुदृढ़ करने के लिए सृजनात्मक और रोचक तरीके तलाश करना सीखने को ज़्यादा आनन्ददाई और कारगर बना सकता है। इसके लिए आदर्श वस्तुओं में से एक है संख्या पहिया – सीखने-सिखाने का एक जाना-माना, आनन्दप्रद और पारस्परिक क्रिया युक्त साधन जो संख्या संक्रियाओं को अनुभवजन्य गतिविधियों में बदल सकता है। संख्या पहिए कम उम्र के शिक्षार्थियों के लिए ख़ासतौर से उपयोगी हैं जो अपने बुनियादी कौशल निर्मित कर रहे होते हैं, लेकिन इन्हें रूपान्तरित करके आगे बढ़ चुके विद्यार्थियों के लिए भी चुनौतीपूर्ण बनाया जा सकता है। इस लेख में आपको जोड़ने का अभ्यास और उसमें महारत हासिल करने के लिए तीन तरह के संख्या पहिए बनाने और उनका उपयोग करने के लिए मार्गदर्शन मिलेगा। यह अभ्यास उन विद्यार्थियों के लिए है जिन्होंने बण्डलों और तीलियों जैसी भौतिक वस्तुओं की मदद से बहुअंकीय जोड़ करना सीख लिया है।

संख्या पहिया क्या है?

संख्या पहिया एक सरल साधन है जिसका आकार सकेन्द्रित चकतियों का एक क्रम होता है। ये चकतियाँ खण्डों में विभाजित होती हैं और हर एक खण्ड में एक संख्या होती है। सबसे भीतरी चकती इकाई चकती कहलाती है, जिसमें 0-9 तक के एकल अंक होते हैं, दूसरी चकती दहाई चकती कहलाती है जिसमें 0-90 तक के 10 के गुणज होते हैं और इस तरह यह सिलसिला आगे बढ़ता जाता है (चित्र-1 देखें)। संख्या पहिया अलग-अलग चकतियों से गुज़रने के द्वारा स्थानीय मानों का ध्यान रखने में हमारी मदद करता है। उदाहरण के लिए, संख्या 27 को संख्या पहिया पर इस तरह चिह्नित किया जा सकता है : चूँकि $27 = 20 + 7$ = 2 दहाई तथा 7 इकाई, इसलिए हम इकाई चकती में 7 को चिह्नित करते हैं (जिसे चित्र-1 में लाल रंग से चिह्नित किया गया है) और दहाई चकती में 20 को चिह्नित करते हैं (जिसे चित्र में नीले रंग से चिह्नित किया गया है)। 0 के स्थान से शुरू करके हर बार जब हम एक चकती पर स्थित सभी स्थानों की घड़ी के घूमने की दिशा में गिनती

पूरी कर लेते हैं तो हम अगली बड़ी चकती में एक स्थान आगे बढ़ जाते हैं। सरल भाषा में कहें तो हर बार जब हम इकाई चकती पर एक चक्कर पूरा कर लेते हैं तो हम दहाई चकती में घड़ी की दिशा में एक क़दम आगे बढ़कर 10 जोड़ देते हैं और यह पैटर्न अन्य चकतियों पर भी जारी रहता है।



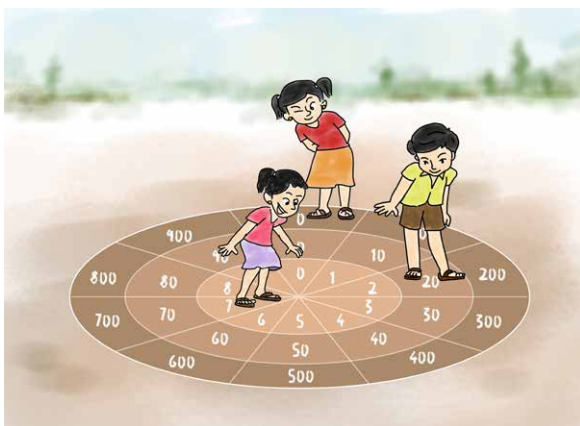
चित्र-1 : तीन सकेन्द्रित चकतियों वाला एक संख्या पहिया जहाँ संख्या 27 को चिह्नित किया गया है।

की-वर्ड : जोड़, संख्या पहिए, महसूस करते हुए सीखना

प्रारम्भिक संख्या संक्रियाओं का अभ्यास करने के लिए संख्या पहिया : प्रकार-1

आइए दो 2-अंकीय संख्याओं के जोड़ से शुरुआत करते हैं। उदाहरण के लिए हम $27 + 45$ का जोड़ करते हैं। संख्या पहियों के चित्र फ़र्श पर खींचे जा सकते हैं, जहाँ बच्चे दो संख्याओं को जोड़ने को 'प्रस्तुत' करते हैं। तीन वालंटियर का चुनाव करके शुरुआत करें: पहले बच्चे को 'इकाई' नाम दें, दूसरे को 'दहाई' और तीसरे बच्चे को 'सैकड़ा'।

चरण-1 : हम संख्या रेखा पर संख्या 27 को चिह्नित करने के लिए 'इकाई' को इकाई चकती पर स्थान 7 पर खड़ा करते हैं, 'दहाई' को दहाई चकती पर स्थान 2 पर खड़ा करते हैं और 'सैकड़ा' को सैकड़ा चकती के स्थान 0 पर खड़ा करते हैं। (चित्र-2 देखें)

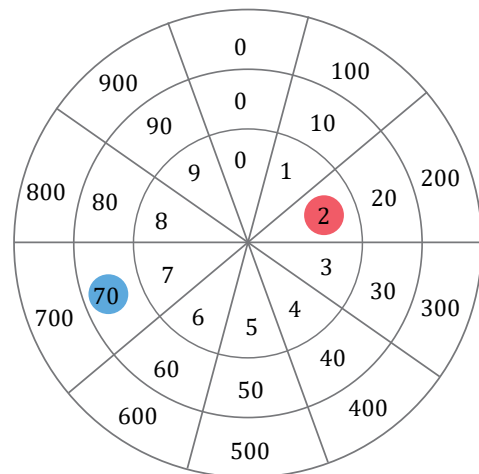


चित्र-2 : संख्या पहिया पर 27 का चिह्नानकन

चरण-2 : 45 जोड़ने के लिए हम यह करते हैं : चूँकि $45 = 4$ दहाई तथा 5 इकाई, इसलिए

- पहले, 'इकाई', इकाई चकती पर स्थान 7 से शुरू करके 5 खण्ड आगे बढ़ता है और इस तरह इकाई चकती पर स्थान 2 पर आ जाता है।
- चूँकि 'इकाई' ने स्थान 0 को एक बार पार कर लिया है, 'दहाई' 20 से 30 पर चला जाएगा। यानी हासिल आगे चला जाएगा।
- फिर हम दहाई चकती पर 4 खण्ड आगे बढ़कर 4 दहाइयाँ जोड़ते हैं। जहाँ वह अभी है वहाँ से शुरू करके : 30 से 70 पर।

तो नई स्थितियाँ होंगी इकाई चकती पर 2 और दहाई चकती पर 70। अतः $27 + 45 = 72$ (चित्र-3)।



चित्र-3 : अन्तिम योग

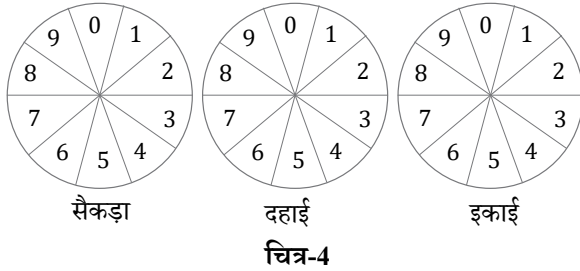
पाठकों के लिए झटपट किए जाने वाले कुछ अभ्यास :

1. संख्या पहिया का उपयोग करके नीचे दिए गए सवालों को हल करें :
 - $7 + 5$
 - $7 + 15$
 - $72 + 54$
2. ऊपर दिए गए उदाहरण में हमने 'हासिल' के दृश्य रूपी अर्थ का थोड़ा वर्णन किया था। इस प्रक्रिया का अर्थ समझाएँ।
3. इस गतिविधि को आगे बढ़ाते हुए दो दो-अंकीय संख्याओं के घटाव की प्रक्रिया को समझाएँ – खासतौर से उधार के दृश्य रूपी अर्थ को।
4. संख्या पहिया का उपयोग करके नीचे दिए गए घटाव के सवालों को हल करें :
 - $12 - 7$
 - $48 - 39$
 - $101 - 57$

प्रकार-2 : पृथक पहिया

इस वाले स्वरूप में चकतियाँ को पृथक करके एक-दूसरे से अलग रखा जाता है (चित्र-4 देखें)। इकाई चकती को दाएँ रखा जाता है, दहाई चकती को बीच में और सैकड़ा चकती को बाएँ। यह व्यवस्था हर अंक के स्थानीय मान पर जोर देने में मदद करती है, जिससे विद्यार्थियों के लिए दृश्य निरूपण को संख्यात्मक मानों से जोड़ना आसान हो जाता है।

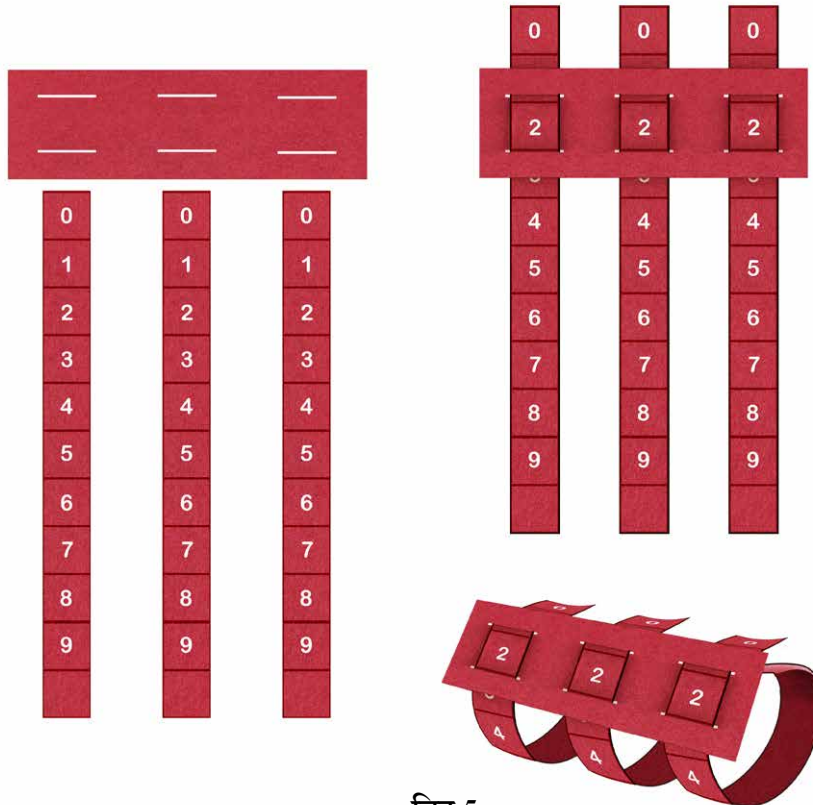
यह प्रकार दो 2-अंकीय संख्याओं के जोड़ के एल्गोरिद्म (नियमों) को सिखाने के लिए खासतौर से उपयोगी है, क्योंकि यह पूरी प्रक्रिया को चरण-दर-चरण स्पष्ट रूप से दर्शाने का मौक़ा देता है। ध्यान दें कि यहाँ दहाई और सैकड़ा की चकतियों को भी 0 से 9 के रूप में चिह्नित किया जाता है, यह एक ऐसा प्रयोग है जिसके बारे में विद्यार्थियों को समझाया जाना ज़रूरी है (उदाहरण के लिए, इकाई चकती पर 5 का मतलब 5, दहाई चकती पर 50 और सैकड़ा चकती पर 500 होता है)।



चित्र-4

प्रकार-3 : ओडोमीटर

इस स्वरूप में, जो कि प्रकार-1 का रूपान्तरित संस्करण है, एक ओडोमीटर का भौतिक मॉडल बनाया जाता है जिसका उपयोग किसी वाहन द्वारा किलोमीटर में तय की गई दूरी को मापने के लिए किया जाता है।



चित्र-5

ज़रूरी सामग्री :

- कार्डबोर्ड का टुकड़ा (6 सेमी × 2 सेमी)।
- कागज़ की तीन पट्टियाँ (प्रत्येक 1 सेमी × 11 सेमी)।
- कैंची, गोंद और मार्कर।

ओडोमीटर बनाने के चरण : (चित्र-5 देखें)।

चरण-1 : कार्डबोर्ड के आधार को तैयार करें

- कार्डबोर्ड लें और उसे तीन बराबर वर्गों में विभाजित कर दें जहाँ हर एक वर्ग 2 सेमी × 2 सेमी का हो।
- दाएँ से बाएँ पढ़ते हुए, वर्गों को क्रमश इकाई स्थान, दहाई स्थान और सैकड़ा स्थान को निरूपित करने के लिए नियत कर दें।

चरण-2 : अंक पट्टियाँ बनाएँ

- कागज़ की तीन पट्टियाँ काट लें, हर एक की माप 1 सेमी × 11 सेमी होनी चाहिए।
- हर पट्टी को 11 बराबर वर्गों में बाँट दें, हर वर्ग 1 सेमी × 1 सेमी का होना चाहिए।
- ऊपर से नीचे की ओर जाते हुए इन वर्गों पर 0 से 9 अंकों तक के लेबल लगा दें। आखिरी वर्ग को खाली छोड़ दें।

चरण-3 : अंक पट्टियों को कार्डबोर्ड में पिरोएँ

- कार्डबोर्ड के तीनों वर्गों पर ऊपर और नीचे एक-एक क्षैतिज काट लगाकर छेद बना दें।
- हर वर्ग के ऊपरी छेद में एक अंक पट्टी को पिरोते हुए उसे निचले छेद से बाहर खींच लें।
- हर अंक पट्टी को इस तरह मोड़ें ताकि पट्टी के अन्त का खाली वर्ग '0' वर्ग के पीछे चिपक जाए। इससे यह सुनिश्चित होता है कि कार्डबोर्ड पर बने वर्गाकार झरोखे से एक समय पर एक ही अंक दिखाई देगा।

चरण-4 : ओडोमीटर के हिस्सों को जोड़ें

- एक बार जब सारी अंक पट्टियाँ पिरोई जा चुकी हों, तो आप पट्टियों को खिसकाते हुए तीन वर्गों में 000 से 999 तक की संख्याएँ दर्शा पाएँगे।

ओडोमीटर का उपयोग

इस मॉडल का उपयोग अन्य स्वरूपों के साथ की गई गतिविधियाँ करने के लिए किया जा सकता है, लेकिन यह व्यक्तिगत गतिविधि में अधिक मदद करता है। हम बच्चों को ओडोमीटर वाली कुछ रोचक शब्द समस्याएँ भी दे सकते हैं, जैसे कि :

“जब आप घर से निकले तो ओडोमीटर 27 दिखा रहा था। आप 45 किलोमीटर दूरी तय करके स्कूल पहुँचे। स्कूल पहुँचने पर ओडोमीटर पर क्या संख्या दिखनी चाहिए?”

कक्षा में संख्या पहियों का उपयोग करने के लिए कुछ व्यावहारिक सुझाव

- बच्चों से अपनी कॉपियों में पेंसिल से संख्या पहिया बनवाने या उन्हें प्रिंट-आउट देने की बजाय फ़र्श पर एक बड़ा संख्या पहिया खींचना ज़्यादा रोचक हो सकता है। बच्चे संख्याओं पर खड़े हो सकते हैं और संक्रियाओं को करते हुए वे अगली संख्या पर उछल या कूद सकते हैं। अन्य विद्यार्थी यह देख सकते हैं और सही संख्याओं की ओर इशारा करके मदद भी कर सकते हैं। इस तरह यह गतिविधि सीखने का एक सहयोगपूर्ण अनुभव बन जाती है।
- शिक्षकों को इस तरह के सवालियों के जवाब देने के लिए तैयार रहना चाहिए, जैसे कि “हम हमेशा 1 की बजाय 0 से क्यों शुरुआत करते हैं?” या “दहाई चकती पर 0 को पार करने के बाद क्या होता है?” ये सवाल संख्या पहियों के पीछे मौजूद सिद्धान्तों को मज़बूत करने में मदद कर सकते हैं और इस बात को स्पष्ट कर सकते हैं कि ये पहिए कैसे काम करते हैं।
- पासे का उपयोग इस गतिविधि को और मज़ेदार बना सकता है। उदाहरण के लिए, आप दो पासे फेंककर जोड़ या घटाव के लिए दो दो-अंकीय संख्याएँ बना सकते हैं। हालाँकि यह ध्यान में रखें कि साधारण पासे 7 से 9 तक के अंक नहीं बना सकते, जिससे बड़ी संख्याओं को बनाने के अन्य तरीकों के बारे में चर्चाएँ छिड़ सकती हैं।
- एक सृजनात्मक कक्षा में ये गतिविधियाँ बच्चों को संख्याओं को जोड़ने के लिए खुद अपने एल्गोरिथ्म बनाने की तरफ़ ले जा सकती हैं। ये टीएलएम बच्चों को घटाव को प्रस्तुत करने में भी मदद कर सकते हैं।

References

1. Hall, D. E., & Hall, C. T. (1977). The odometer in the addition algorithm. *The Arithmetic Teacher*, 24(1), 18-21. Retrieved Jan 25, 2025, from <https://doi.org/10.5951/AT.24.1.0018>



राजकुमार कनोजिया ने गणित में पोस्ट ग्रेजुएशन किया है। उनके पास शिक्षा में बैचलर डिग्री है। उन्होंने स्कूल नेतृत्व एवं प्रबन्धन में पोस्ट ग्रेजुएट डिप्लोमा भी हासिल किया है और कई शिक्षण योग्यता परीक्षाएँ उत्तीर्ण की हैं। उन्हें 14 सालों का शिक्षण अनुभव है। वर्तमान में वे महाराष्ट्र में एक सीबीएसई स्कूल के साथ काम कर रहे हैं। वे गणित सीखने और सिखाने के साथ टेक्नोलॉजी और कला को जोड़ने में रुचि रखते हैं। उनका मानना है कि गणित सिर्फ़ एक विषय नहीं है बल्कि ऐसी भाषा है जो सभी के द्वारा समझी जानी चाहिए। उनसे rajkumar.kanojiya7@outlook.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : भरत त्रिपाठी **पुनरीक्षण :** सुशील जोशी **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय

गणित के कार्ड :

कक्षा में UNO के ज़रिए सीखना

सुमित कुमार पाण्डे

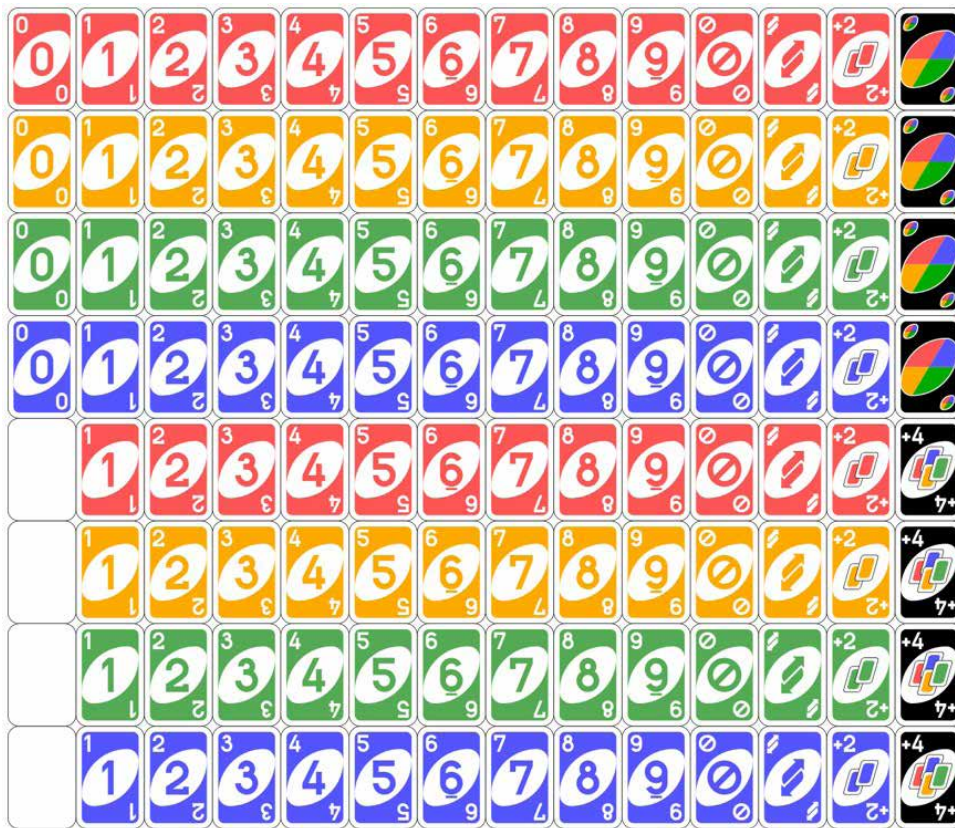
UNO एक कार्ड गेम है जिसे दुनिया भर में सभी उम्र के लोग खेलना पसन्द करते हैं। चटख रंग के कार्ड, आसान नियम और फटाफट चलने वाला यह खेल स्कूल की छुट्टियों में और परिवार के इकट्ठा होने पर अक्सर खेला जाता है। लेकिन मौज़-मस्ती और उत्साह से परे, UNO में एक रोचक शैक्षिक साधन बनने की क्षमता भी निहित है, खासकर गणित सीखने-सिखाने की। मैं इस लेख में विद्यार्थियों के साथ UNO गुणन खेल खेलने के अपने अनुभवों के बारे में बता रहा हूँ। साथ ही कुछ सुझाव हैं कि कैसे शिक्षक गणित पढ़ाने के लिए UNO कार्ड का रचनात्मक तरीके से उपयोग कर सकते हैं।

UNO क्या है?

1971 में मर्ले रॉबिंस ने UNO खेल रचा था। UNO रंग-बिरंगे कार्ड वाला एक रोचक खेल है। इस खेल में अपने पास के सभी कार्ड जल्द-से-जल्द खत्म करने होते हैं, जिसके हाथ के कार्ड सबसे पहले खत्म होते हैं, वह पहला विजेता होता है। खेल के बारे में संक्षिप्त जानकारी इस तरह है :

- **खिलाड़ी :** 2-10
- **लक्ष्य :** जीतने के लिए अपने हाथ के सभी कार्ड खत्म करने होते हैं।
- **एक गड्डी में कितने कार्ड :** एक गड्डी में कुल 108 कार्ड होते हैं। ये चार अलग-अलग रंगों (लाल, पीला, हरा, नीला) में 0 से लेकर 9 संख्या तक के कार्ड होते हैं। कुछ विशेष चाल चलने का इशारा करने वाले कार्ड होते हैं। (देखें चित्र-1)
- **नियम :** बारी आने पर हाथ का वह कार्ड फेंका (या चला) जाता है जो पहले चले गए सबसे आखिरी कार्ड (यानी ढेरी के सबसे ऊपरी कार्ड) के रंग से या संख्या से मेल खाए। अगर खिलाड़ी के पास ऐसा कोई कार्ड नहीं है तो वह नीचे अलग रखी गड्डी से एक कार्ड उठा सकता है। फिर भी मेल खाने वाला कार्ड नहीं आया तो उसे अपनी बारी छोड़नी होगी।
- **विशेष कार्ड**
 - ♦ **स्किप :** किसी खिलाड़ी द्वारा यह कार्ड फेंके जाने पर अगले खिलाड़ी को अपनी बारी छोड़नी पड़ती है।
 - ♦ **रिवर्स :** किसी खिलाड़ी द्वारा यह कार्ड फेंके जाने पर खिलाड़ियों के खेलने का क्रम उल्टा हो जाता है।
 - ♦ **दो उठाएँ :** यह कार्ड फेंके जाने पर अगले खिलाड़ी को गड्डी से दो कार्ड उठाने पड़ते हैं।

की-वर्ड : UNO, कार्ड गेम, गणित के खेल, सक्रिय शिक्षण, खुद बनाएँ



चित्र-1 : UNO की एक गड्डी के सभी कार्ड (स्रोत : विकीमीडिया कॉमन्स)

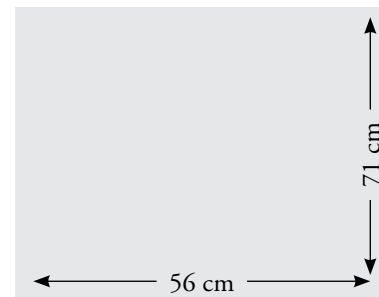
- ♦ **वाइल्ड** : यह कार्ड फेंककर खिलाड़ी चले जा रहे कार्डों का रंग बदल सकता है और अपनी पसन्द का रंग चुन सकता है – अगले खिलाड़ी चुने गए रंग के कार्ड चलेंगे।
- ♦ **वाइल्ड व चार उठाएँ** : यह कार्ड फेंककर खिलाड़ी अपने पसन्द का रंग चुन सकता है और साथ ही अगले खिलाड़ी को चार कार्ड उठाने के लिए कहता है।

UNO जैसा गुणन खेल

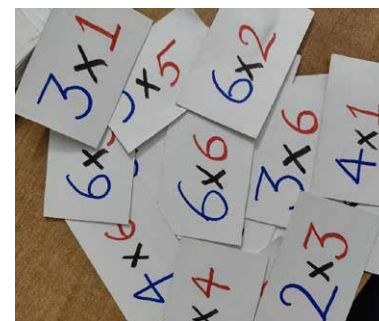
संसाधनों की कमी वाली कक्षा में UNO कार्ड खरीदकर उनका उपयोग करना मुश्किल होगा। ऐसे में शिक्षक कक्षा में UNO के विकल्प के रूप में विशेष रूप से डिज़ाइन किए गए कार्ड बना सकते हैं। यहाँ मैं अपने द्वारा डिज़ाइन किए गए UNO जैसा गुणन खेल और इस खेल के कक्षा के अपने अनुभव के बारे में बता रहा हूँ।

कार्ड बनाना :

- 56 सेमी × 71 सेमी माप की थोड़े मोटे कागज़ की एक शीट लें।
- शीट पर हर 5 सेमी की दूरी पर आड़ी (क्षैतिज) लकीर खींचें।
- शीट पर हर 7 सेमी की दूरी पर खड़ी (ऊर्ध्वाधर) लकीर खींचें।
- इनसे हमें 5 सेमी × 7 सेमी के 110 आयत मिलेंगे, जो कार्ड के 2 समूह बनाने के लिए पर्याप्त हैं।



चित्र-2 : कागज़ की मोटी शीट



चित्र-3 : खेल के लिए UNO कार्ड्स की तरह बनाए गए कार्ड

- इनसे आयताकार कार्ड काट लें और उन पर गुणन तथ्य (गुणनखण्ड अथवा multiplication facts) लिखें।
- क्रमविनिमेयता के गुण के कारण एक जैसे दो गुणन तथ्यों को लिखने से बचें। उदाहरण के लिए, यदि आपने 2×5 का कार्ड बना लिया है तो 5×2 का कार्ड बनाने से बचें।
- गुणन तथ्य कार्ड चित्र-3 में दिखाए गए जैसे दिखेंगे।

1×1	2×1	3×1	4×1	5×1	6×1	7×1	8×1	9×1	10×1
1×2	2×2	3×2	4×2	5×2	6×2	7×2	8×2	9×2	10×2
1×3	2×3	3×3	4×3	5×3	6×3	7×3	8×3	9×3	10×3
1×4	2×4	3×4	4×4	5×4	6×4	7×4	8×4	9×4	10×4
1×5	2×5	3×5	4×5	5×5	6×5	7×5	8×5	9×5	10×5
1×6	2×6	3×6	4×6	5×6	6×6	7×6	8×6	9×6	10×6
1×7	2×7	3×7	4×7	5×7	6×7	7×7	8×7	9×7	10×7
1×8	2×8	3×8	4×8	5×8	6×8	7×8	8×8	9×8	10×8
1×9	2×9	3×9	4×9	5×9	6×9	7×9	8×9	9×9	10×9
1×10	2×10	3×10	4×10	5×10	6×10	7×10	8×10	9×10	10×10
1×1	2×2	3×3	4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	10×10

चित्र-4 : 56 सेमी × 71 सेमी की एक शीट से उपरोक्त तालिका में दर्शाए गए कार्ड के दो समूह बनाए जा सकते हैं।

खेल के नियम

इस खेल के नियम UNO खेल से काफ़ी मिलते-जुलते हैं :

1. कार्ड को ठीक से फेंटना चाहिए और सभी खिलाड़ियों को बराबर-बराबर कार्ड बाँटना चाहिए। हरेक खिलाड़ी को 5 या 7 कार्ड दिए जा सकते हैं। बचे हुए कार्ड उठाने वाले कार्ड की गड्डी में रखे जाते हैं।
2. खेल नीचे रखी गड्डी से एक कार्ड खोलने के साथ शुरू होता है।
3. खिलाड़ी द्वारा जो अगला कार्ड चला जाएगा वह आखिरी चले गए कार्ड के गुणनफल के बराबर गुणनफल का होना चाहिए या चले गए कार्ड के गुणनखण्ड की किसी एक संख्या वाला होना चाहिए। उदाहरण के लिए, यदि आखिरी चला गया कार्ड 7×8 है तो अगला कार्ड 7×8 के बराबर गुणनफल वाला होना चाहिए या उसमें 7 या 8 गुणनखण्ड के रूप में होना चाहिए।
4. यदि खिलाड़ी के पास दोनों में से किसी भी तरह का कार्ड नहीं है, तो खिलाड़ी नीचे रखी गड्डी में से एक कार्ड उठाएगा।
5. कार्ड चलते समय खिलाड़ियों को गुणनखण्ड और उनके गुणनफल को जोर से बोलना होगा। यदि खिलाड़ी ऐसा करना भूल जाते हैं या ग़लत गुणनफल बताते हैं और अन्य खिलाड़ी इसे पकड़ लेते हैं, तो उस खिलाड़ी को गड्डी से दो कार्ड उठाने होंगे।
6. जिस खिलाड़ी के कार्ड सबसे पहले खत्म होंगे, वह खेल का विजेता होगा।

कक्षा में इस खेल का अनुभव एवं विद्यार्थियों की प्रतिक्रिया

इस कार्ड खेल को पाँचवीं कक्षा के उन विद्यार्थियों के साथ खेला गया, जिन्हें गुणा में कठिनाई हो रही थी। उन्होंने इसे एक मजेदार गतिविधि के रूप में लिया। शुरू में, उन्हें नियमों को समझने में कुछ समय लगा, लेकिन एक बार जब उन्हें नियम समझ आ गए तो उन्हें एहसास हुआ कि जीतने के लिए गुणन सारणी जानना ज़रूरी है। इस खेल से उन्हें स्वाभाविक रूप से प्रेरणा मिली। पहले दिन, खेल खत्म होने में बहुत समय लगा क्योंकि उनके पास जो कार्ड थे उन्हें उनके गुणनफल पता नहीं थे। लेकिन जैसे-जैसे वे खेलते गए, उन्हें धीरे-धीरे खेल समझ में आ गया और उन्होंने खुद ही गुणन सारणी सीखना शुरू कर दिया।

इस गतिविधि ने विद्यार्थियों के साथ गुणन सारणी पर चर्चा करना आसान बना दिया। उन्हें सारणी रटने और याद करने के लिए कहने की बजाय, खेल ने स्वाभाविक रूप से गुणन सारणी सीखने के लिए प्रेरित किया। नियमित खेल उनके गणना कौशल को और बढ़ा सकता है। यह खेल विद्यार्थियों को गुणन तथ्यों को अधिक प्रभावी ढंग से याद करने में भी मदद करता है और जानकारी को ध्यान में बनाए रखने की उनकी क्षमता में सुधार करता है।

कक्षा में क्या करें, क्या न करें

शिक्षकों को ग्रेड-2 और 3 के विद्यार्थियों को गुणा की अवधारणा समझाने में मदद करने के लिए वास्तविक जीवन के उदाहरण और भौतिक वस्तुओं के ज़रिए गुणा को बार-बार जोड़ने की संक्रिया के रूप में समझाना चाहिए। गुणा को समझाने के लिए 'बार' शब्द का इस्तेमाल करने से गुणा की अवधारणा स्पष्ट होती है। इस खेल का उपयोग गुणन सारणी सीखने को मजेदार और इंटरैक्टिव बनाने के लिए किया जा सकता है। ग्रेड-4 और उससे बड़ी कक्षाओं के विद्यार्थियों के लिए यह खेल गुणन तथ्यों का अभ्यास करने का एक मजेदार तरीका हो सकता है, यह उन्हें गुणन सारणी को याद रखने और उनका प्रभावी ढंग से उपयोग करने के लिए प्रोत्साहित करता है।

शिक्षक को इस खेल गतिविधि को कक्षा में कराते समय इन बातों का ध्यान रखना चाहिए :

- सुनिश्चित करें कि विद्यार्थी इस बात को समझें कि कार्ड क्या दर्शाते हैं।
- खेल शुरू होने के पहले विद्यार्थियों को खेल के नियमों के बारे में संक्षेप में बताएँ।
- विद्यार्थी ठीक से खेल समझ जाएँ इसके लिए शिक्षक को एक-दो बार इस खेल को बच्चों के साथ खेलना चाहिए।
- खेल के दौरान उन्हें उत्तर खोजने और सक्रिय भागीदारी करने के लिए प्रेरित करें।
- विद्यार्थियों को 4 से 5 बच्चों के समूह में खेल खिलवाएँ। यदि कक्षा में अधिक बच्चे हैं तो सभी को खेलने का मौका देने के लिए कई समूह बनाएँ।
- सुनिश्चित करें कि खेल सुचारू रूप से खेला जाए, जिससे विद्यार्थी खेल में मगन और व्यस्त रहें।

कक्षा में UNO

कक्षा में, खेल अक्सर अमूर्त विचारों और करके सीखना के बीच एक सेतु का काम करते हैं। वे विद्यार्थियों को उन अवधारणाओं को समझने का एक रोचक और इंटरैक्टिव तरीका प्रदान करते हैं, जिन्हें सीखना-सिखाना चुनौतीपूर्ण लगता है। UNO कार्ड के संख्यात्मक मान, अनुक्रम और तार्किक नियम इसे बुनियादी गणितीय अवधारणाओं को पढ़ाने के लिए विशेष रूप से उपयुक्त बनाते हैं। इनकी बहुमुखी प्रतिभा उन्हें फ्लैशकार्ड या समूह खेल जैसी गतिविधियों के लिए आदर्श बनाती है। कई शिक्षकों ने UNO कार्ड से विभिन्न आयु समूहों और कौशल स्तरों के अनुरूप विभिन्न प्रकार की गतिविधियाँ तैयार की हैं। यह गतिविधियाँ मिसाल हैं कि कैसे UNO कार्ड गणितीय सीखने को प्रभावी बना सकते हैं। UNO कार्ड द्वारा की जा सकने वाली अन्य गतिविधियाँ जानने के लिए सन्दर्भ सूची 1-3 देखें।

फ़ाउण्डेशनल स्टेज (आयु 3-8) के लिए

- **एक रंग के कार्ड छाँटना :** बच्चे UNO कार्ड को उनके रंगों के अनुसार छाँट सकते हैं। इससे रंगों को पहचानने और वर्गीकृत करने की उनकी क्षमता मज़बूत होती है।

- **संख्या मिलान** : समान संख्याओं वाले कार्डों को समूहीकृत कर सकते हैं। इससे बच्चे संख्या पहचान और मिलान करने का कौशल विकसित करते हैं।
- **संख्या-वस्तु-अंक** : एक कार्ड चुनना, कार्ड में अंकित संख्या के बराबर वस्तुएँ गिनना और सम्बन्धित अंक पहचानना। यह गतिविधि विद्यार्थियों को मात्राओं को समझने और उनके गणना कौशल को मज़बूत करने में मदद करती है।
- **10 के मित्र** : इस गतिविधि में एक कार्ड चुनना होता है। जिस संख्या का कार्ड आया उसमें और कितने जोड़ने से 10 बनेगा यह बताना होता है। इससे जोड़ का कौशल बेहतर होता है।
- **एक अंक वाली संख्या का जोड़-घटा** : इसमें कोई दो कार्ड चुनकर उनकी संख्याओं को आपस में जोड़ना या घटाना बुनियादी अंकगणितीय संक्रियाओं के अभ्यास करवाता है।

प्रिपरेटरी स्टेज (आयु 7-10) के लिए

- **गुणा तालिका अभ्यास** : रैंडमली कोई दो कार्ड चुनना और उनके मानों का गुणा करना गुणन कौशल को सुदृढ़ करने में मदद करता है।
- **दो अंक वाली संख्याओं का जोड़-घटा** : दो अंक वाली संख्याओं के जोड़-घटा सम्बन्धित सवालों को बनाने और हल करने के लिए UNO कार्ड का उपयोग किया जा सकता है। यह उनमें गणना कौशल को बढ़ाता है।
- **अधिक या कम** : दो कार्डों के मानों की तुलना करके यह बताना कि कौन-सा बड़ा और कौन-सा छोटा है। यह गतिविधि संख्यात्मक समझ और संख्यात्मक सम्बन्धों की समझ को बढ़ावा देती है।

ये गतिविधियाँ UNO कार्ड को शैक्षिक साधन के रूप में अपनाने की क्षमता को प्रदर्शित करती हैं। UNO कार्ड आधारित गतिविधियाँ विभिन्न शिक्षण चरणों में विद्यार्थियों के लिए गणित को सुलभ और आनन्ददायक बनाती हैं।

निष्कर्ष

UNO जैसा गुणन खेल गुणन सारणी सीखने के अक्सर नीरस कार्य को एक रोचक और इंटरैक्टिव अनुभव में बदल देता है। शैक्षिक उद्देश्यों के साथ खेल खिलाना स्वाभाविक रूप से विद्यार्थियों की त्वरित सोच, एकाग्रता और सहयोग को बढ़ावा देता है। साथ ही गुणन सारणी का अभ्यास करने और उसमें महारत हासिल करने के लिए प्रेरित करता है। यह गतिविधि सक्रिय भागीदारी को प्रोत्साहित करती है, जो इसे पारम्परिक रटने की विधियों की तुलना में कहीं अधिक आकर्षक बनाती है।

References

1. Kunova, J. (2024, April 2). UNO Cards: 22 Awesome Ways To Use Them in Maths. *Rainbow Sky Creations*. <https://bit.ly/4aAUcpr>
2. Porter, R. (2021, October 28). *Fun Math Games to Play with Uno Cards*. Tickled Pink in Primary. <https://bit.ly/40NNcIS>
3. Winter, H. (2023, November 12). *Fun Learning Math Activities with Uno Cards*. Happy Tot Shelf. <https://bit.ly/4jtRGWj>

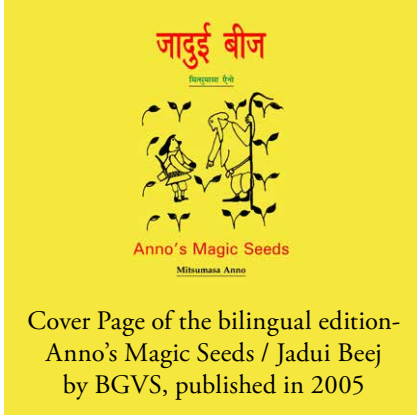


सुमित कुमार पाण्डे अप्रैल 2020 से अज़ीम प्रेमजी स्कूल बाड़मेर में गणित के शिक्षक हैं। वे पिछले 7 वर्षों से गणित शिक्षण क्षेत्र में काम कर रहे हैं। उनमें समावेशी और जुड़ाव वाला शिक्षण वातावरण बनाने का जज़्बा है। उन्हें क्रिकेट खेलना, फ़िल्में देखना और घूम-घूमकर नई जगहों के बारे में जानना पसन्द है। सुमित से sumit.pandey@azimpremjifoundation.org पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : प्रियेश गुप्ता **पुनरीक्षण** : प्रतिका गुप्ता **कॉपी एडिटर** : अनुज उपाध्याय

ऐनो के जादुई बीज : गणित की कक्षा में इस्तेमाल के नज़रिए से कहानी की समीक्षा

मनीषा गोयल द्वारा समीक्षित



जादुई बीज (*Anno's Magic Seeds*) 1992 में मित्सुमासा ऐनो द्वारा लिखी गई बच्चों की कहानी की एक किताब है। मित्सुमासा ऐनो (1926-2020) जापान के एक गणित शिक्षक और बच्चों की किताबों के मशहूर लेखक व चित्रकार हैं। वे प्राइमरी स्कूल के एक प्रशिक्षित शिक्षक और एक स्व-शिक्षित कलाकार थे। उन्होंने बच्चों की किताबों के लिए 300 से अधिक चित्र बनाए हैं। गणित में उनका प्रशिक्षण और गणित के प्रति उनकी गहरी रुचि जादुई बीज किताब की कहानी और चित्र दोनों में झलकती है। लेखक और चित्रकार का यह मेल बच्चों और वयस्कों दोनों के लिए इस कहानी के पढ़ने को एक दिलचस्प गणितीय अनुभव और कथानक से जोड़े रखता है।

यह किताब श्रीमान ऐनो द्वारा विभिन्न गणितीय विषयों पर लिखी गई बच्चों की किताबों की शृंखला का एक हिस्सा है (इस शृंखला की कुछ अन्य किताबें हैं – *Anno's Counting Book*, *Anno's Hat Tricks*, *Anno's Counting House*)। मूल रूप से जापानी भाषा में लिखी गई जादुई बीज कहानी कई भाषाओं में प्रकाशित हो चुकी है। इस किताब का अंग्रेज़ी-हिन्दी द्विभाषी संस्करण भारत ज्ञान विज्ञान समिति द्वारा 2005 में प्रकाशित किया गया था। जादुई बीज की कहानी घातीय वृद्धि (exponential growth) को दर्शाने के लिए बीजों से पौधों के निकलने और पौधों से बीज प्राप्त होने के सिद्धान्त पर बात करती है। STEM¹ किताबों के चलन की शुरुआत से बहुत पहले लिखी गई इस किताब के गणितीय सिद्धान्त केन्द्रीय कथानक को आगे बढ़ाते हैं। गणित और कहानी का इस तरह का ताना-बाना हमें आज भी बहुत कम किताबों में देखने को मिलता है। श्रीमान ऐनो के शब्दों में, कहानी सिर्फ गणित सिखाने के लिए नहीं लिखी गई थी, बल्कि टेक्स्ट और चित्रों दोनों

में बुनी गई अंकगणितीय पहेलियों का मज़ा लेने के लिए लिखी गई थी।²

कहानी की शुरुआत जैक नाम के एक युवक और एक बूढ़े जादूगर की एक संयोगवश मुलाकात से होती है। जादूगर जैक को दो जादुई बीज उपहार में देता है। जादूगर जैक से एक बीज को पकाकर खाने के लिए कहता है, जिससे पूरे साल उसे भूख नहीं लगेगी, वह तृप्त रहेगा। वह उसे अगले साल 2 और बीज प्राप्त करने के लिए दूसरे बीज को बोने के लिए भी कहता है। जैक जादूगर के निर्देश के अनुसार कई सालों तक ऐसा करता रहता है। फिर वह एक दिन यह फ़ैसला लेता है कि वह एक भी बीज नहीं खाएगा और एक साथ दोनों बीजों को बो देगा। यहीं से कहानी एक महत्त्वपूर्ण मोड़ लेती है। अगले साल वे 2 बीज 4 बीजों में बदल जाते हैं। वह उनमें से 1 खाता है और बाक़ी 3 बीज बो देता है। अगले साल उसे 6 बीज मिलते हैं, वह 1 खाता है और बाक़ी 5 बीज बो देता है। और इस तरह कहानी आगे बढ़ती रहती है। बाद के सालों में, गणितीय जटिलता बढ़ती जाती है

1 विज्ञान, प्रौद्योगिकी, इंजीनियरिंग और गणित आधारित किताबें
(Science, Technology, Engineering and Maths based books)

2 ऐनो के जादुई बीज किताब के लेखक नोट से उद्धरित

क्योंकि वह शादी कर लेता है, फिर उनका एक बच्चा होता है। वह बीज इकट्ठा करना और उन्हें बेचना शुरू कर देता है और फिर एक दिन भयानक तूफान आता है और सब कुछ नष्ट कर देता है। जैक के पास सिर्फ 10 बीज रह जाते हैं और वह उनसे फिर से शुरुआत करता है।



कहानी में पाठकों से बीच-बीच में दो सवाल बारम्बार पूछे जाते हैं :

- वह कितने बीज बोएगा?
- अगली पतझड़ में जैक के बगीचे में कितने बीज लगेंगे?

कहानी का इस तरह का ढाँचा कक्षा के लिए संवादपूर्ण सत्र बनाने के लिए उपयुक्त होता है क्योंकि कहानी में पहले से ही सवाल शामिल हैं। मैंने इस कहानी का इस्तेमाल प्राइमरी और मिडिल दोनों स्कूलों के बच्चों के साथ किया है। छोटे बच्चों (ग्रेड 2-3) के साथ मैंने इसका इस्तेमाल सिर्फ गणितीय कहानी सुनने के मजे का अनुभव करने के लिए किया। मैंने देखा कि बच्चे जोड़, घटा और दोगुना करने की बुनियादी समझ के साथ भी कहानी का मजा ले पाए, हालांकि मुझे कहानी के अधिक जटिल हिस्सों को छोड़ना पड़ा।

मैंने कक्षा-6 के विद्यार्थियों के साथ इस कहानी का इस्तेमाल घातीय वृद्धि पैटर्न (exponential growth patterns) को समझने के लिए किया। मैं कहानी को जोर से पढ़ते हुए बीच-बीच में रुक जाती थी ताकि विद्यार्थियों को सवालों के जवाब तलाशने का मौका मिल सके। शुरुआती कुछ सवाल तो ज्यादातर बच्चे आसानी से हल कर पाए। (उदाहरण के लिए, पहले साल में 2 बीज दोगुने होकर 4 हो गए, 3 बीज (जैक द्वारा खाए गए 1 बीज को घटाने के बाद) दूसरे साल

में दोगुने होकर 6 हो गए।) शुरुआती कुछेक सालों के बाद, साल के साथ-साथ बीजों की बढ़ती संख्या का ट्रैक रखने के लिए हमें किसी एक तरीके की जरूरत महसूस हुई। इसके लिए, हमने नीचे दिखाए अनुसार एक तालिका बनाई।

तालिका ने विद्यार्थियों को उभरते पैटर्न को नोटिस करने में मदद की और आने वाले सालों में उगाए गए और बोए गए बीजों की संख्या की गणना करने की प्रक्रिया को गति दी।

(किसी एक साल में उगाए गए बीजों की संख्या का पता लगाने के लिए, हमें बोए गए बीजों की संख्या को दोगुना करना होगा। लेकिन अगले साल बोए गए बीजों की संख्या पिछले साल उगाए गए बीजों से एक कम है, क्योंकि जैक हर साल एक बीज खाता है। इसलिए, हमें एक विशेष साल में बोए गए बीजों की संख्या को दोगुना करना होगा और फिर अगले साल बोए गए बीजों की संख्या का पता लगाने के लिए उसमें से एक घटाना होगा। यह इस कहानी में इस्तेमाल किया गया मूल पैटर्न है।)

साल	बोए गए बीजों की संख्या	उगाए गए बीजों की संख्या	पैटर्न
1	2	4	$2 \times 2 = 4$
2	3	6	$4 - 1 = 3, 3 \times 2 = 6$
3	5	10	$6 - 1 = 5, 5 \times 2 = 10$
4	9	18	$10 - 1 = 9, 9 \times 2 = 18$
5	17	34	$18 - 1 = 17, 17 \times 2 = 34$
6	33	66	$34 - 1 = 33, 33 \times 2 = 66$

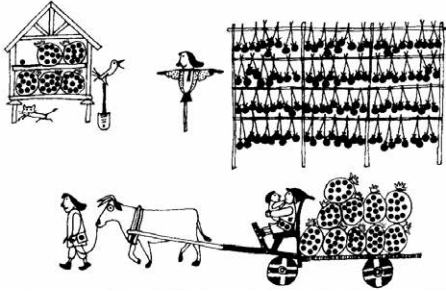
(साल-दर-साल बीजों की बढ़त के पैटर्न को दर्शाती तालिका। साल 1 का आशय यहाँ उस साल से है जब जैक ने पहली बार दो बीज उगाए।)

सातवें साल से, जब कहानी में थोड़ा बदलाव होता है (यानी, जैक की शादी हो जाती है और वह बीजों को बाँटने और बेचने लगता है), तो अगले साल बोए जाने वाले बीजों की संख्या पता करने के लिए बीजों की एक अलग संख्या घटानी पड़ती है। इस पड़ाव पर, कुछ विद्यार्थियों को कहानी में प्रस्तुत सवालों के जवाबों की गणना करने के लिए कागज़ और पेंसिल की भी जरूरत पड़ी। लेकिन तालिका ने उन्हें यह देखने में मदद की कि दोगुना करने का मूल पैटर्न अभी भी वही था। कहानी खत्म होने के बाद, हमने कहानी में इस्तेमाल किए गए पैटर्न और सवालों को हल करने के लिए बच्चों द्वारा इस्तेमाल की गई रणनीतियों पर एक छोटी चर्चा की। इसी चर्चा की वजह से उपरोक्त तालिका में दिखाई देने वाले आखिरी कॉलम को जोड़ा गया। इस तरह की पैटर्न

और नियम पहचान गतिविधि बीजगणित करने से पहले की उत्कृष्ट/ बढ़िया तैयारी है। (और अधिक जानने के लिए इस अंक का पुलआउट देखें।)

बीजों की संख्या अधिक हो जाने पर तालिका के अलावा, कहानी के साथ दिए गए गणितीय रूप से सही व सटीक चित्रों ने भी विद्यार्थियों की मदद की, इन चित्रों को देखकर विद्यार्थी बढ़ते पैटर्न आसानी से पहचान सकते हैं। हमने देखा कि पैटर्न पहचानने और बीजों की संख्या का पता लगाने में आसानी हो इसके लिए चित्रांकन गुणन सारणीनुमा और 10 के समूहों में किया गया है।

उदाहरण के लिए, कहानी के इस हिस्से में हम देख सकते हैं कि 10-10 बीजों की 10 पोटलियाँ गाड़ी पर व्यवस्थित रूप से रखी हैं जिनमें ठीक 100 बीज रखे दिखाई दे रहे हैं; बीजों के भण्डार गृह में 10-10 के समूहों में 51 बीज रखे हुए हैं; और 30-30 बीजों की पंक्तियों में 120 बीज व्यवस्थित हैं और इतना ही नहीं 30 बीजों की इन पंक्तियों को तीन बराबर खण्डों में बाँटकर दर्शाया गया है, प्रत्येक खण्ड में बीजों की 5 जोड़ियाँ हैं। यह पैटर्न पहचानकर कहानी में आने वाले गणितीय सवाल को हल करने में बच्चों की मदद करता है।



अगला साल नौवाँ साल था जब जैक ने बीज न खाकर दोनों बीजों को बोया था। वसंत में बहुत से अंकुर निकले जिनसे पतझड़ में बहुत से बीज बने। उस वर्ष उन्हें एक बच्चे का जन्म हुआ। जाड़ों में उन्होंने कुल मिलाकर 3 बीज खाए, क्योंकि हरेक ने एक-एक बीज खाया। अब उनके पास बीजों का बहुत स्टॉक हो गया था। इसलिए उन्होंने गोदाम के बीज भी निकाले और कुल मिलाकर 100 बीजों को बेचने के लिए बाजार गए। उन्होंने नई फ़सल के 51 बीजों को कोठरी में रखा और बचे बीजों को बो दिया।

उन्होंने कितने बीज बोए?

काम का फॉलोअप करने के लिए, विद्यार्थियों को समूहों में काम करने और यह पता लगाने के लिए कहा गया कि क्या होगा यदि बीज हर साल दोगुने होने की बजाय तीन गुना हो जाएँ। विद्यार्थियों ने अपने-अपने समूहों में इसके लिए तालिकाएँ बनाईं। इससे उन्हें गुणन पैटर्न को और अधिक समझने में मदद मिली।

सत्र के दौरान, मैंने अन्य दिनों की तुलना में कक्षा में ज्यादा भागीदारी देखी। मैंने सवाल को हल करने की रणनीतियों

पर समूह में चर्चा होते हुए भी देखी। इन चर्चाओं के दौरान वे बिना किसी बाहरी मदद के ग़लती होने पर एक-दूसरे को आसानी से सुधार भी पा रहे थे। यह भी महत्वपूर्ण पहलू है जिस पर हमें गणित की कक्षा में ध्यान देने की ज़रूरत है। गणित पढ़ाने में इस तरह की कहानियों के इस्तेमाल ने मुझे उद्देश्य को प्राप्त करने में मदद की। हम एक ही कहानी को अलग-अलग तरीकों से और अलग-अलग आयु समूहों के

फ़ाउण्डेशनल और प्रिपरेटरी स्टेज के सन्दर्भ में कहानी से प्राप्त कुछ सुझाव इस प्रकार हैं :

फ़ाउण्डेशनल स्टेज

बच्चों को चित्रों से संख्याओं को जोड़ने के लिए प्रोत्साहित किया जा सकता है जिनमें दो, पाँच, दस आदि के समूहों को दर्शाया गया है। संख्याओं को इस तरह से कैसे दर्शाया जाए, उस पर वर्कशीट हो सकती हैं। यह संख्याओं की, खासतौर पर विभाज्यता से सम्बन्धित, गहरी समझ के बनाने की ओर ले जाता है। कहानी में इस्तेमाल किए गए विज़ुअल (दृश्य) दस के ढाँचे (विषम-सम और पाँच के समूह दोनों) के साथ स्पष्ट सम्बन्ध दिखाते हैं।

प्रिपरेटरी स्टेज

हर साल उगाए और बोए गए बीजों की संख्या पता करने की रणनीतियों पर चर्चा बच्चों को पैटर्न पहचानने (2, 3, 5, 9, 17...) और नियम (पिछली संख्या के दोगुने से एक कम या $2n - 1$) की व्याख्या करने के लिए प्रेरित कर सकती है, साथ ही इसी उद्देश्य के लिए 2 संक्रियाओं को शामिल करते हुए इसी तरह के पैटर्न बनाने वाली वर्कशीट भी दी जा सकती है। [इसे (माध्यमिक चरण में) बीजगणित के शिक्षण से भी जोड़ा जा सकता है।] इसके लिए, साल के दौरान प्राप्त हुए, खाए और बोए गए बीजों की संख्या को तर्क के साथ एक तालिका में भरा जाए है। यहाँ, किताब में दिए गए चित्र बहुत मददगार हो सकते हैं।

इसके बाद, कहानी को दर्शाने वाला एक ग्राफ़ भी बनाया जा सकता है। विद्यार्थियों को ग्राफ़ में बीजों की संख्या में एकदम हुई वृद्धि और फिर गिरावट को नोट करने के लिए प्रोत्साहित किया जा सकता है। यह जीवन में आने वाले उतार-चढ़ाव के बारे में बात करने का मौक़ा भी प्रदान करता है और यह भी कि अगर कुछ बीज हों तो जीवन फिर से कैसे संवारा जा सकता है। ऐसे कौन-से बीज हो सकते हैं? ऐसी चर्चाएँ साहित्य और गणित के सम्बन्धों को मज़बूत कर सकती हैं।

साथ इस्तेमाल करके देख सकते हैं कि हमारे विद्यार्थियों के लिए कौन-सा तरीका कब सबसे अच्छी तरह से काम करता है। उदाहरण के लिए, भविष्य में, इस टेक्स्ट का इस्तेमाल करते समय मैं विद्यार्थियों को कुछ ऐसे अतिरिक्त सवाल देना चाहूँगी, जैसे :

- क्या होगा यदि 1 को दोगुना करने और घटाने का पैटर्न 10 साल या 20 साल तक जारी रहे?
- जैक को 1,000 या 1,00,000 बीज हासिल करने में कितने साल लगेंगे?

मैं यह भी देखना चाहूँगी कि विद्यार्थी अलग-अलग पैटर्न का इस्तेमाल करके अपनी खुद की कहानी की किताबें कैसे डिजाइन करते हैं।

अलग-अलग आयु और ग्रेड स्तरों के बच्चों के साथ गणित की कक्षा में इस्तेमाल किए जाने के लिए यह कहानी एक बेहतरीन संसाधन है। हम जानते हैं कि गणितीय

अवधारणाओं से जुड़ने के लिए बच्चों का साहित्य एक अर्थपूर्ण सन्दर्भ प्रदान करने में मदद करता है। जादुई बीज ऐसे साहित्य का एक बेहतरीन उदाहरण है। गणितीय पैटर्नों का अवलोकन करना, चर्चा करना, दस्तावेज बनाना, पहचानना और पूर्वानुमान लगाना सीखना एक महत्वपूर्ण कौशल है। कहानी में मुख्य पात्र जैक कई परिस्थितियों (चुनौतियों, सफलताओं और असफलताओं) का सामना करता है, जिससे विद्यार्थी आसानी से जुड़ सकते हैं और अपनी वास्तविक दुनिया से जोड़कर देख सकते हैं। बच्चे भविष्य के लिए जैक की योजना और दूरदर्शिता की सराहना करना शुरू कर देते हैं और साथ ही जीवन की परिस्थितियों में बदलाव के साथ ज़िम्मेदारी और देखभाल के विचारों को आत्मसात करते हैं। अन्य संसाधनों के साथ इस किताब का इस्तेमाल निश्चित रूप से विभिन्न अवधारणाओं के शिक्षण और कक्षा में अच्छे जीवन कौशल और सकारात्मक दृष्टिकोण के विकास को समृद्ध कर सकता है।

आभार

लेखक अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी की सुश्री स्वाती सरकार द्वारा दिए गए सुझावों के लिए आभारी हैं।

References

1. Anno, M. (1992). Anno's Magic Seeds/Jadui Beej <https://arvindguptatoys.com/arvindgupta/anno.pdf>



मनीषा गोयल ने दिल्ली के निजी और सरकारी स्कूलों में 12 साल तक प्राइमरी स्कूल शिक्षिका के बतौर काम किया है। पढ़ाने के साथ-साथ उन्होंने लगभग 5 साल तक प्राइमरी स्कूल के पुस्तकालय का प्रबन्धन भी किया है। उन्होंने अपने विद्यार्थियों में साहित्य के साथ गणित में भी रुचि विकसित करने की ओर काम किया है। उन्होंने दिल्ली विश्वविद्यालय से प्राथमिक शिक्षा में स्नातक की डिग्री और भारत रत्न डॉ. बी. आर. अम्बेडकर विश्वविद्यालय दिल्ली से शिक्षा में मास्टर डिग्री प्राप्त की है। मनीषा से manisha.npv@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : सीमा पुनरीक्षण : प्रतिका गुप्ता कॉपी एडिटर : अनुज उपाध्याय

जोड़ गुणा

कोलेगल के एक स्कूल में विज़िट के दौरान हमने कक्षा-4 का अवलोकन किया, जहाँ टीचर गुणन तथ्यों की समझ जानने के लिए विद्यार्थियों का टेस्ट ले रहे थे। ज़्यादातर विद्यार्थियों ने सही जवाब दिया, लेकिन एक विद्यार्थी ने कहा कि 3 का 2 से गुणा करने पर 5 आता है।

उसके सहपाठियों ने तुरन्त इस ग़लती की ओर ध्यान दिलाया और टीचर ने कहा कि उस विद्यार्थी ने गुणा करने की बजाय जोड़ दिया है। फिर शिक्षक ने अगले विद्यार्थी से पूछा कि 3 गुणा 3 क्या है और पूरे समूह ने एक स्वर में 6 🤔 कहा।

स्पष्ट है कि इस तरह की ग़लतियों के लिए क्लास को कुछ मदद की ज़रूरत थी। अपने सुझाव AtRightAngles.editor@apu.edu.in पर भेजें।

पूर्ण संख्याओं के लिए मैनिप्यूलेटिव्स सामग्री : कब और क्यों?

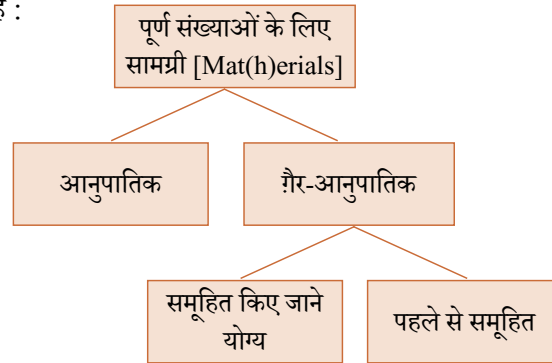
मैथ स्पेस द्वारा समीक्षित

पूर्ण संख्याओं से जुड़ी अवधारणाओं जैसे स्थानीय मान, तुलना, अंकगणितीय संक्रियाओं आदि को सिखाने में उपयोग की जाने वाली मैनिप्यूलेटिव्स वस्तुओं के बारे में कई शिक्षकों के सवाल होते हैं। यह लेख इन वस्तुओं का एक तुलनात्मक अध्ययन है। इनको कब और कैसे इस्तेमाल करना है जैसे मुद्दों पर इस लेख में बात की गई है।

एट राइट एंगल्स ने कई मैनिप्यूलेटिव्स¹ वस्तुओं की समीक्षा की है जिनका उपयोग स्थानीय मान और पूर्ण संख्याओं की तुलना तथा उन पर की जाने वाली अंकगणितीय संक्रियाओं को सिखाने के लिए किया जा सकता है। इन वस्तुओं में (i) ऐरो कार्ड (ii) गणितमाला (iii) काउंटर (iv) 10 के फ्रेम (v) फ्लैट-लॉन्ग-यूनिट (एफएलयू) (vi) डीस ब्लॉक और (vii) स्टेटिक बीड्स शामिल हैं। (इन पर एट राइट एंगल्स के विभिन्न अंकों में इसी क्रम में चर्चा की गई है।) इसके अलावा, तीली बण्डल एक लोकप्रिय और व्यापक रूप से उपयोग की जाने वाली वस्तु है। कुछ और भी ऐसी मैनिप्यूलेटिव्स वस्तुएँ हैं जिन्हें आमतौर पर इस्तेमाल किया जाता है – (क) अबेकस और (ख) नोट एवं सिक्के। इनमें से कई वस्तुएँ एनसीईआरटी और पश्चिम बंगाल तथा सिक्किम जैसे कुछ राज्यों के फ़ाउण्डेशनल (कक्षा 1-2) और प्रिपरेटरी स्टेज (कक्षा 3-5) की गणित की पाठ्यपुस्तकों में शामिल हो गई हैं।

पूर्ण संख्याओं के लिए मैनिप्यूलेटिव्स सामग्री के प्रकार

ऐरो कार्ड को छोड़कर ऊपर उल्लिखित सभी मैनिप्यूलेटिव्स वस्तुएँ मात्राओं की द्योतक होती हैं। इसके विपरीत ऐरो कार्ड इकाइयों, दहाइयों आदि का इस्तेमाल करके संख्यात्मक रूप बनाते हैं। बाक़ी वस्तुओं को मोटेतौर पर दो समूहों में वर्गीकृत किया जा सकता है :



- **आनुपातिक** : जिनमें 10 स्पष्ट रूप से (आकार में) एक से 10 गुना बड़ा होता है या 100 एक का 100 गुना या 10 का 10 गुना होता है। गणितमाला, 10 के फ्रेम, तीली बण्डल, एफएलयू, डीस ब्लॉक, स्टेटिक बीड्स इस श्रेणी में आते हैं और काउंटर भी।

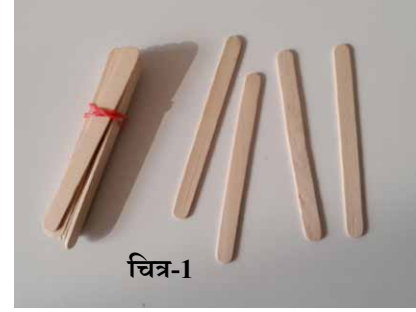
1. मैनिप्यूलेटिव्स यानी ऐसी भौतिक वस्तुएँ जिनका उपयोग गणितीय अवधारणाओं और प्रक्रियाओं की बेहतर समझ बनाने के लिए, अमूर्त अवधारणाओं को ठोस बनाने के लिए किया जाता है। इन वस्तुओं से बने मॉडल विज्ञान अलाइजेशन में मदद करते हैं। अधिकांश मैनिप्यूलेटिव्स संख्याओं से जुड़े होते हैं। इनका उपयोग परिचय, तुलना, जोड़-घटाना-गुणा-भाग करने के लिए किया जा सकता है। बीजगणित टाइलें इनमें से एक है। जियोबोर्ड और रबर बैंड ज्यामिति के लिए हैं। रंगोमेट्री, जोड़ो स्ट्रॉ, इंटरलॉकिंग क्यूब्स, फ्लेक्सिवायर, आकार परिवार, टैनग्राम, पॉलीओमिनो कट जो संख्याओं, पैटर्न और ज्यामिति के लिए काम आते हैं।

की-वर्ड : संख्यात्मकता, संख्या कौशल, मैनिप्यूलेटिव्स, विशेषताएँ, तुलना

- **गैर-आनुपातिक** : इनमें ऐसे अनुपात मान लिए जाते हैं जो वास्तव में वैसे दिखाई नहीं देते। अबेकस और नोट व सिक्के इस श्रेणी में आते हैं। ₹100 का नोट क्षेत्रफल/ आयतन या भार में ₹10 के नोट का 10 गुना नहीं होता और यही बात ₹10 या ₹1 के सिक्के पर लागू होती है।

आनुपातिक मैनिप्युलेटिव्स वस्तुओं के भी दो उप-समूह होते हैं :

I. समूहित किए जाने योग्य : हर इकाई किसी दहाई या सैकड़े का हिस्सा हो सकती है या अकेली भी रह सकती है। तीली बण्डल (और काउंटर) इस श्रेणी में आते हैं।

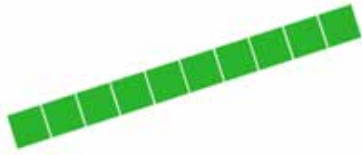


चित्र-1

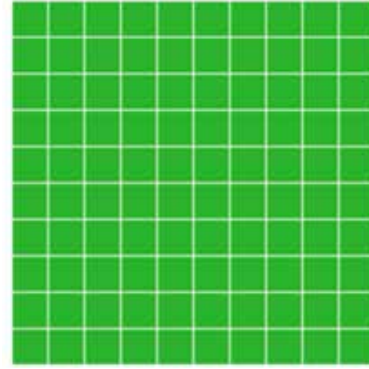
II. पहले से समूहित : हर इकाई, दहाई, सैकड़ा का अपने आप में एक अस्तित्व होता है। इन्हें और नहीं तोड़ा जा सकता या किसी और बड़ी वस्तु का हिस्सा नहीं बनाया जा सकता।



यह वर्ग सदा सिर्फ एक इकाई ही रहता है।



दस/ लॉन्ग (छड़) – ये वर्ग सदा सिर्फ किसी दहाई का हिस्सा होते हैं, कभी अलग-अलग इकाइयों के रूप में नहीं होते।



सौ/ प्रलैट (तख्ती) – ये वर्ग सदा सिर्फ किसी सैकड़े का हिस्सा होते हैं, कभी किसी दहाई का हिस्सा नहीं होते या कभी अलग-अलग इकाइयों के रूप में नहीं होते।

चित्र-2

दिलचस्प बात है कि गणितमाला और 10 के फ्रेम में उक्त दोनों प्रकारों के गुण शामिल रहते हैं :

उदाहरण के लिए, 7 और 13, दोनों में नीली गोठियाँ इकाइयाँ हैं जबकि 13 में जो गुलाबी काउंटर हैं वे एक पूरे फ्रेम या 10 का हिस्सा हैं; ध्यान दें कि यह किसी भी काउंटर की अपने सम्बन्धित फ्रेम में स्थिति से स्वतंत्र होता है।

चित्र-3 : 10 के फ्रेम

पहली गणितमाला में काले मनकों का समूह 24 को निरूपित करते हुए एक दहाई में हैं, लेकिन दूसरी गणितमाला में 17 को निरूपित करते हुए वे इकाइयाँ बन जाते हैं।

चित्र-4 : गणितमाला

	पहले से समूहित सामग्री के गुण	समूहित किए जाने योग्य सामग्री के गुण
गणितमाला	मनके दस-दस के समूहों में होते हैं और उन्हें उसी के अनुरूप रंग दिया जाता है	हर मनका किसी दहाई का हिस्सा हो सकता है या फिर एक अकेली इकाई माना जा सकता है, जो इस बात पर निर्भर करेगा कि हम किस संख्या को निरूपित कर रहे हैं
दस के फ्रेम	2 × 5 फ्रेम	रखा गया हर काउंटर किसी दहाई का हिस्सा हो सकता है (अगर वह एक पूरा फ्रेम बन जाए) या एक इकाई माना जा सकता है

यह उन्हें बेहद उपयोगी बना देता है!

अब हमें बेस-10 (10 के आधार) यानी स्थानीय मान को समझने की मज़बूत बुनियाद बनाने के लिए आनुपातिक सामग्री से शुरुआत करनी चाहिए। इसके अलावा, चूँकि कम उम्र के शिक्षार्थियों के लिए व्यावहारिक अनुभव बेहद महत्वपूर्ण होता है, हमें ऐसी मैनिप्युलेटिव्स सामग्री से शुरुआत करनी चाहिए जिसमें समूहित किए जाने वाले गुण हों। नीचे दी गई तालिका इन वस्तुओं के विभिन्न गुणों को प्रदर्शित करती है :

सामग्री	संख्या की सीमा	बनाने में आसानी का स्तर	उपयोग	आभासी रूप की उपलब्धता	सम्भावित विस्तार
काउंटर	0-10 और अधिक	शिक्षार्थियों द्वारा जुटाए जा सकते हैं, ये कंकड़, बटन, बीज आदि हो सकते हैं – अच्छा हो यदि ये एक जैसे हों, लेकिन ऐसा होना एकदम ज़रूरी नहीं है	गिनती, तुलना, चार संक्रियाएँ, पैटर्न तथा और भी चीज़ें	हाँ	पूर्णांकों के लिए रंगीन या चिह्नांकित
दस के फ्रेम	0-20, 0-50	आसानी से बनाए जा सकते हैं	गिनती, एक अंकीय जोड़ के तथ्यों का स्वचालीकरण (automatization), सम-विषम की पहचान	हाँ	गुणजों और संख्या पैटर्न के लिए अन्य फ्रेम
गणितमाला	0-100, 0-200	शिक्षार्थियों द्वारा बनाई जा सकती है	गिनती, संख्याओं का क्रम , तुलना, चार संक्रियाएँ व और भी चीज़ें	अभी तक नहीं	पूर्णांकों के लिए चौरंगी रूप
तीली बण्डल	0-100, सम्भवतः 0-999	शिक्षार्थी इकट्ठा करके बण्डल बना सकते हैं	गिनती, समूहीकरण (दहाइयों में) का अभ्यास , तुलना, जोड़-घटाव	अभी तक नहीं	गुणन के लिए लम्बी रंगीन – गैर-आनुपातिक बन जाती है
एफएल्यू	0-999	शिक्षकों द्वारा बनाए जा सकते हैं जिसमें सम्भवतः वे कुछ बड़ी उम्र के विद्यार्थियों की मदद ले सकते हैं	निरूपण, तुलना, चार संक्रियाएँ, क्षेत्रफल के लिए महत्वपूर्ण , वर्ग एवं वर्गमूल	हाँ	दशमलव एफएल्यू, बीजगणितीय टाइल
डीस ब्लॉक	0-1000	स्थानीय स्तर पर बनाना बेहद मुश्किल	तुलना, चार संक्रियाएँ, आयतन के लिए महत्वपूर्ण	हाँ	दशमलव रूप
स्टेटिक बीड्स	0-1000	स्थानीय स्तर पर बनाना मुश्किल	निरूपण, तुलना, चार संक्रियाएँ		
अबेकस	तीन अंकीय संख्याओं के आगे	स्थानीय स्तर पर बनाना मुश्किल	निरूपण, जोड़-घटाव	अभी तक नहीं	दशमलव रूप
नोट एवं सिक्के	0-999	स्थानीय स्तर पर बनाए जा सकते हैं	निरूपण, जोड़-घटाव, इबारती सवाल		

इस तरह, काउंटर और तीली बण्डल सीधे शिक्षार्थियों द्वारा जुटाए जा सकते हैं, जबकि गणितमाला उनके द्वारा आसानी से बनाई जा सकती है। एफएल्यू भी किसी भी स्कूल में स्थानीय स्तर पर बनाए जा सकते हैं लेकिन उनके लिए किसी शिक्षक और मिडिल/ हाई स्कूल विद्यार्थियों के सक्रिय निरीक्षण की आवश्यकता होगी। 10 के फ्रेम तथा नोट व सिक्के भी स्थानीय स्तर पर बनाए जा सकते हैं। मनके स्थानीय स्तर पर बनाए जा सकते हैं – लेकिन इसमें काफ़ी ज़्यादा सामग्री (लगभग 2000 गोलाकार मनके) और बहुत ज़्यादा श्रम लगेगा। इसी प्रकार, अबेकस को भी किसी बड़ई की मदद से स्थानीय स्तर पर बनाया जा सकता है। लेकिन डीस ब्लॉक को बनाना मुश्किल हो सकता है अगर कोई कुशल बड़ई आपके सम्पर्क में न हो तो।²

2. डीस ब्लॉक : इकाई छोटा घन होनी चाहिए, जैसे 1 सेमी × 1 सेमी × 1 सेमी। छड़ (या दहाई) इकाई की 10 गुना होनी चाहिए, यानी, 10 सेमी × 1 सेमी × 1 सेमी। फ्लैट (या सैकड़ा) छड़ का 10 गुना होना चाहिए, यानी, 10 सेमी × 10 सेमी × 1 सेमी। और अन्त में बड़ा घन (हज़ार) फ्लैट का 10 गुना होना चाहिए, यानी, 10 सेमी × 10 सेमी × 10 सेमी। अगर इकाई थोड़ा बड़ा घन हो तो फिर बाक्री के हिस्से उसी अनुपात में बड़े होने चाहिए।

इसके अलावा, यह भी ध्यान रखें कि सीखने के शुरुआती चरण में ये वस्तुएँ शिक्षार्थियों की पहुँच में होना चाहिए। इसलिए, कक्षा में इनका एक ही सेट होना शायद पर्याप्त न हो। यह सही है कि विद्यार्थी अवलोकन के द्वारा सीखते हैं। लेकिन गहराई से सीखने के लिए यह ज़रूरी है कि वे खुद इन वस्तुओं के साथ जुड़ें। इसलिए, आदर्श स्थिति होगी कि 30 बच्चों की कक्षा में इन वस्तुओं के कम-से-कम 6-8 सेट हों ताकि प्रति सेट के साथ 4-5 शिक्षार्थियों को सीखने का मौका मिल सके।

इसलिए, पर्याप्त डीस ब्लॉक और स्टेटिक बीड्स का बन्दोबस्त करना मुश्किल है। यही बात अबेकस के लिए भी हो सकती है।

स्टेज के अनुसार

काउंटर, तीली बण्डल और गणितमाला फ़ाउण्डेशनल स्टेज में गिनती करने, दहाइयों के गट्टर बनाने और संख्याओं के साथ खेलने के लिए बेहद महत्वपूर्ण होते हैं। समूहित किए जाने योग्य सामग्री के रूप में तीली बण्डल दहाइयों के गट्टर बनाने और फिर जब भी एक प्रकार के 10 मौजूद हों तो एक बड़ा बण्डल बनाने का बेहद ज़रूरी ठोस अनुभव प्रदान करते हैं। (इसलिए 10 दहाइयाँ एक बड़ा बण्डल, सैकड़ा बनाती हैं।) गणितमाला दिखाती है कि दहाइयाँ बाईं ओर तथा इकाइयाँ दाईं तरफ़ होती हैं और इस तरह (दो-अंकीय संख्या में) बाएँ अंक को दहाई के रूप में तथा दाएँ अंक को इकाइयों के रूप में दिखाती हैं। चार रंगों वाली 200 मनकों की गणितमाला (जिसमें एक-दूसरे से भिन्न दो रंग 0-100 दिखा रहे हों और ऐसे ही दो और रंग 100-200 दिखा रहे हों) इसे आगे ले जाती है और दिखाती है कि सैकड़े का अंक सबसे बाएँ होना चाहिए। ये मालाएँ संख्या रेखा का मैनिप्युलेटिव्स की सम्भावना वाला रूप भी होती हैं और दोनों के कई साझा गुण होते हैं (चित्र-5)। 10 के फ़्रेम शायद इन दोनों जितने महत्वपूर्ण न हों लेकिन कुछ ज़रूरी मानसिक छवियाँ पैदा करते हैं।



चित्र-5 : गणितमाला और दोहरी गणितमाला

प्रिपेरेटरी स्टेज में, जब हम दो अंकों के आगे जाते हैं, तब जहाँ तक उपयोग करने में आसानी की बात है तो एफएलयू पहले से समूहित सामग्री के रूप में तीली बण्डल की तुलना में अधिक उपयोगी हो जाते हैं। इसके अलावा, गुणा-भाग में एफएलयू की व्यवस्थाएँ बाद की कई अवधारणाओं के लिए पूर्व शर्त होती हैं जिनमें परिधि और क्षेत्रफल शामिल हैं (हालाँकि यह केवल इन तक सीमित नहीं रहती)।

जब हम चार अंकीय संख्याओं पर पहुँचते हैं, तो आनुपातिक सामग्री के साथ काम करना मुश्किल हो जाता है। कोई शिक्षक आसानी से 10 सैकड़ों को जोड़कर बनाए गए हजार को दिखा सकता है, बच्चों को यह दर्शाने के लिए कि 1000 कितना बड़ा होता है। लेकिन इसे किन्हीं भी दो चार-अंकीय संख्याओं की तुलना करने या फिर किसी सामान्य कक्षा में संक्रियाओं आदि के लिए उपयोग करना व्यावहारिक और व्यवस्थागत रूप से असम्भव है। यहीं पर गैर-आनुपातिक सामग्री मदद कर सकती है। दुर्भाग्यवश, 1000 का नोट अब उपलब्ध नहीं है। इसलिए इस स्थिति में अब नोट व सिक्के मदद नहीं कर सकते। अबेकस इसमें मदद कर सकता है, खासतौर से संख्या-संरचना (स्थानीय मान) और जोड़-घटाव के सन्दर्भ में।

हमें यह भी याद रखना चाहिए कि जब कोई शिक्षार्थी चार-अंकीय संख्याओं तक पहुँचता/ पहुँचती है तो उसके पास 10-आधार (यानी स्थानीय मान) की पर्याप्त समझ होनी चाहिए और उसे मैनिप्युलेटिव्स सामग्री के बग़ैर चार-अंकीय संख्याओं के साथ काम करने में सक्षम होना चाहिए।

संक्षेप में

गणितमाला = 1डी (एक-आयामी) बेस 10, एफएलयू = 2डी (दो-आयामी) बेस 10, डीस ब्लॉक = 3डी (त्रि-आयामी) बेस 10

- काउंटर इसलिए महत्वपूर्ण हैं क्योंकि हम इनसे गिनना सीखते हैं, इन्हें प्राप्त करना और बनाना भी बहुत आसान होता है।

- तीली बण्डल भी महत्वपूर्ण हैं क्योंकि ये दहाइयों में समूहित करने का अनुभव प्रदान करती हैं और जुटाने/ बनाने में आसान हैं।
- गणितमाला बहुत बढ़िया है क्योंकि यह संख्या रेखा से जुड़ जाती है और अंकों के क्रम से सम्बन्ध स्थापित करती है और बनाने में आसान है।
- एफएलयू 2डी बेस-10 ब्लॉक के रूप में उत्कृष्ट हैं – 2डी होना इन्हें ज्यादा उपयोगी और पर्याप्त मात्राओं में स्थानीय रूप से बनाना आसान बनाता है।

इसलिए, ऊपर बताई गई इन चारों वस्तुओं को निश्चित रूप से इस्तेमाल किया जाना चाहिए और पर्याप्त मात्रा में यानी, हर 4 विद्यार्थियों के लिए एक सेट।

- दस के फ्रेम बनाने में आसान हैं और उनके ऊपर उल्लिखित गुण हैं।
- नोट एवं सिक्के वास्तविक जीवन में संख्याओं के उपयोग को सन्दर्भ में रखने में मदद कर सकते हैं, खासतौर पर खरीदने-बेचने के सन्दर्भ में और ये विद्यार्थियों द्वारा बनाए जा सकते हैं।

ऊपर बताई गई ये दोनों सामग्रियाँ **वाँछनीय श्रेणी** में आती हैं।

- स्टेटिक बीड्स को बनाने के लिए बहुत ज्यादा प्रयास और सामग्री (मनकों) की जरूरत पड़ती है। लेकिन ये अवधारणात्मक स्पष्टता प्रदान करते हैं।
- डीस ब्लॉक बनाने के लिए विशेष शिल्प कौशल और बारीकरी की जरूरत होती है।

अतः इन दोनों वस्तुओं को प्रदर्शन के हिसाब से रखा जा सकता है। अबेकस – गैर-आनुपातिक है, इसलिए अवधारणात्मक स्पष्टता में मदद नहीं करता। यह उन कुछ शिक्षार्थियों के लिए मददगार हो सकता है जो कक्षा-5 या बाद की कक्षाओं में कुछ अवधारणाओं के साथ जूझ रहे हों। इसे बनाना आसान नहीं है। इसलिए इसका **उपयोग करने की जरूरत नहीं**।

ऐरो कार्ड बेस-10 संरचना को खोलने में मदद करते हैं और इसलिए बेहद उपयोगी हैं, लेकिन इन्हें किन्हीं आनुपातिक वस्तुओं के साथ मिलाकर इस्तेमाल किया जाना चाहिए। इन्हें स्थानीय रूप से एफएलयू की अपेक्षा ज्यादा आसानी से बनाया जा सकता है। इसलिए इन्हें पर्याप्त मात्रा में इस्तेमाल किया जाना चाहिए।

गणितमाला, दस के फ्रेम, तीली बण्डल, एफएलयू और हाँ, ऐरो कार्ड एनसीईआरटी की गणित की पाठ्यपुस्तकों में दाखिल हो चुके हैं। सिक्किम जैसे कुछ राज्यों ने इन्हें पहले ही अपनी पाठ्यपुस्तकों में शामिल कर लिया था। अबेकस पश्चिम बंगाल की प्रादेशिक पाठ्यपुस्तकों में शामिल हो चुका था। हम चाहते हैं कि पाठक इन वस्तुओं की खूब जाँच-पड़ताल करें। सम्बन्धित लिंक नीचे दी गई हैं।

Reference

1. Arrow Cards: <https://bit.ly/42ZuwRX>
2. Ganitmala: <https://bit.ly/4hRl9rs>
3. Counters: <https://bit.ly/3EzT7m2>
4. Ten-Frames: <https://bit.ly/4hXAtCU>
5. Flats-Long-Units (FLU): <https://bit.ly/430USCK>
6. Dienes Blocks and Static Beads: <https://bit.ly/3Qjnb8a>
7. NCERT textbooks: <https://bit.ly/4jSCn9H>
8. Sikkim textbooks: <https://bit.ly/4aZQkPl>
9. West Bengal textbooks: <https://bit.ly/410ikNU>

मैथ स्पेस अजीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी की एक गणित प्रयोगशाला है जो स्कूलों, शिक्षकों, अभिभावकों, बच्चों, स्कूली शिक्षा में काम कर रहे एनजीओ और शिक्षक प्रशिक्षकों की जरूरतों को पूरा करती है। यह गणित के लिए सीखने-सिखाने की विभिन्न सामग्री (mat(h)erials), उसके विस्तार और कबाड़ से बनाए जा सकने वाले उसके कम लागत के विकल्पों की सम्भावनाओं की खोजबीन करती है। यह गणित की दुनिया की विस्तृत श्रेणी के दोनों छोरों पर स्थित लोगों पर ध्यान देने की कोशिश करती है – वे जो गणित से भय खाते हैं या नफ़रत तक करते हैं और वे जिन्हें गणित से जुड़ने में खूब मज़ा आता है। यह एक ऐसी जगह है जहाँ विचार जन्म लेते हैं और विकसित होते हैं जिसका श्रेय कई लोगों के साथ होने वाले पारस्परिक व्यवहारों को जाता है। मैथ स्पेस के साथ यहाँ सम्पर्क किया जा सकता है : mathspace@apu.edu.in

मैथ स्पेस : <https://sites.google.com/apu.edu.in/mathspace/home>

अनुवाद : भरत त्रिपाठी पुनरीक्षण : सुशील जोशी कॉपी एडिटर : अनुज उपाध्याय

लेख आमंत्रित हैं...

एट राइट एंगल्स भारत की सार्वजनिक शिक्षा प्रणाली में गणितीय शिक्षा को समर्पित एक गुणवत्तापूर्ण संसाधन है। इसे विशेषकर बुनियादी, प्राथमिक और माध्यमिक पाठशालाओं के शिक्षक और शिक्षकों के प्रशिक्षकों के लिए तैयार किया गया है।

हम गणित के शिक्षकों, शिक्षाविदों, अभ्यासकर्ताओं (प्रेक्टिसनर्स), अभिभावकों और विद्यार्थियों से लेख आमंत्रित करते हैं। यदि आप एक ऐसा मंच तलाश रहे हैं जो ख़ासतौर से लगभग 6-14 साल के विद्यार्थियों के गणित के सीखने के अनुभव को समृद्ध करता हो और बढ़ाता हो, तो यह पत्रिका आपके लिए है। आपके लेखों का स्वागत है।

विषय एवं थीम के लिए सुझाव

भेजे जाने वाले लेख कक्षा-1 से 8 की पाठ्यक्रम सामग्री पर केन्द्रित होना चाहिए। लेखों से अपेक्षा है कि वे :

- स्कूली शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा, 2023 (NCF-SE-2023) में उल्लेखित विषय और थीम को विस्तारपूर्वक समझा सकें और दर्शा सकें।
- ख़ासकर NCF-SE-2023 में चर्चित चुनौतियों को सम्बोधित करते हों।
- गणितीय इतिहास या गणितीय सोच के इतिहास का प्रमाणित विवरण हों।
- विद्यार्थियों को प्रशिक्षण और अभ्यास में तल्लीन रखने के लिए नवाचारी वर्कशीट या तरीकों को शामिल कर सकें।
- बच्चों के सन्दर्भ में प्रासंगिक, गणित के रोजमर्रा जीवन में उपयोग का वर्णन कर सकें।
- अन्तःविषय गतिविधियों और परियोजनाओं (प्रोजेक्ट) का वर्णन कर सकें।
- पाठ्यक्रम से जुड़ी पहेलियों और खेलों की समीक्षा कर सकें।
- ऑनलाइन रिसोर्स सहित प्रासंगिक सामग्री के चयन पर मार्गदर्शन कर सकें।

- बुनियादी संख्या ज्ञान के साथ-साथ गणनात्मक सोच के लिए शैक्षणिक रणनीतियाँ विकसित कर सकें।
- विभिन्न शैक्षणिक पद्धतियों को लागू करने में शिक्षकों की सहायता कर सकें।
- टीचर्स लर्निंग मटेरियल (टीएलएम) की समीक्षा कर सकें या गणित की कक्षा में स्थानीय सन्दर्भ और स्थानीय टीएलएम का उपयोग कैसे करें इसके बारे में बता सकें।
- विद्यार्थियों में अवधारणात्मक समझ की खाई को पाटने में सहायता करने के लिए सामग्री प्रदान कर सकें।
- आकलन में आने वाली परेशानियों का समाधान कर सकें।
- गणित सीखने के दौरान होने वाली गलतफ़हमियों को पहचानने और समझने के लिए उपाय सुझा सकें।
- समस्याओं की सूची, उनके हल पर चर्चा एवं समस्या-समाधान की रणनीतियों सहित दे सकें, जो कि सामान्यतौर पर पाठ्यपुस्तकों में नहीं मिलती।

बड़े लेखों के अलावा हम छोटे लेखों का भी स्वागत करते हैं जिनमें विविध तरह की रोचक सामग्री शामिल हो। जैसे किसी किताब या गणित के सॉफ्टवेयर की समीक्षा या गणितीय थीम पर आधारित यूट्यूब की कोई क्लिप। प्रूफ़ विदाउट वर्ड्स (proofs without words), गणितीय अन्तर्विरोध (mathematical paradoxes), असिद्धीकरण (false proofs) पर आधारित लेख हो सकते हैं। गणितीय विषयों पर आधारित कविता, कार्टून या तस्वीरों (photographs) जैसी रचनात्मक अभिव्यक्तियों को शामिल करते लेख हो सकते हैं। आप किसी गणितज्ञ से जुड़े क्रिस्से या 'हस्तशिल्प में गणित, फ़िल्मों में गणित' जैसे रोचक विषयों पर भी लेख भेज सकते हैं।

लेख AtRightAngles.editor@apu.edu.in पर भेजें।

कृपया आगे दी गई सम्पादकीय नीतियों और दिशा-निर्देशों को भी देखें।

लेखों को स्वीकार करने की नीति

एट राइट एंगल्स प्रारम्भिक गणित और गणितीय शिक्षा से सम्बन्धित मुद्दों पर पूर्णतः केन्द्रित पत्रिका है। इसलिए लेखों का प्रयास होना चाहिए कि वे गणित के आम मिथकों, धारणाओं और भ्रान्तियों से परे हों।

पत्रिका में कहीं और से नक़ल या चोरी करके भेजे गए लेखों के लिए बिल्कुल भी जगह नहीं है। लेखक द्वारा लेख को प्रकाशन के लिए भेजे जाने पर माना जाता है कि यह मौलिक है और प्रकाशन के लिए इस पर किसी भी तरह का क़ानूनी प्रतिबन्ध नहीं है (जैसे किसी अन्य का कॉपीराइट स्वामित्व)। लेख में जहाँ भी उपयुक्त हो वहाँ प्रासंगिक सन्दर्भ और स्रोतों का उल्लेख किया जाए।

एट राइट एंगल्स पत्रिका अन्य भारतीय भाषाओं में भी अनूदित होती है। इसलिए, अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी को पत्रिका में प्रकाशित सभी लेखों का अन्य भाषाओं में अनुवाद और प्रसार करने का अधिकार होगा।

यदि भेजा गया लेख पहले कहीं प्रकाशित हो चुका है, तो लेखक से अनुरोध है कि वे पूर्ववर्ती प्रकाशक से अन्यत्र पुनर्प्रकाशन के लिए अनुमति अवश्य प्राप्त कर लें। और लेख के अन्त में 'लेखक का नोट' के तहत इसका उल्लेख करें। इसके अलावा, यह अपेक्षा भी की जाती है कि लेखक हमारे रिकॉर्ड के लिए अनुमति पत्र की एक कॉपी लेख के साथ भेजें। इसी तरह, यदि लेखक **एट राइट एंगल्स** में प्रकाशित अपना लेख पुनः प्रकाशन के लिए कहीं और भेज रहे हैं तो उनसे अपेक्षा है कि वे **एट राइट एंगल्स** को यथोचित श्रेय अवश्य दें।

एट राइट एंगल्स में विविध तरह के लेखों का स्वागत है। ऐसे लेख जो गुणवत्ता की दृष्टि से अच्छे हैं लेकिन इस पत्रिका में प्रकाशन के लिए उपयुक्त नहीं हैं, उनका उपयोग लेखक की सहमति से यूनिवर्सिटी की अन्य पत्रिकाओं में किया जा सकता है।

लेखकों के लिए विशेष दिशा-निर्देश

अगर आप *एट राइट एंगल्स* के लिए लिख रहे हैं तो कृपया इन दिशा-निर्देशों पर ध्यान दें :

- रोचक परिचय** : शुरुआत से ही पाठक का ध्यान आकर्षित करने के उद्देश्य से पठनीय और रोचक शैली में लिखें। लेख के पहले पैराग्राफ से ही स्पष्ट हो जाना चाहिए कि लेख किस विषय के बारे में है। उदाहरण के तौर पर, शुरुआती पैराग्राफ एक अप्रत्याशित निष्कर्ष हो सकता है, एक चुनौती हो सकती है, एक मजेदार सवाल के साथ चित्र हो सकता है या एक प्रासंगिक किस्सा हो सकता है। खासतौर से ये आगे पढ़ते जाने की रुचि पैदा करने वाला होना चाहिए।
- लुभावना शीर्षक** : लेख का शीर्षक एक उपयुक्त और लुभावने वाक्यांश से दिया जाए, जिसमें लेख की भावना और सत्व झलके।
- शैली** : प्रमाण-सिद्ध प्रारूप (Theorem-Proof Format) में लेख लिखने से परहेज करें। इसकी बजाय, अनौपचारिक तरीके से प्रमाणों (Proofs) को लेख में एकीकृत करें।
- सन्तुलन** : लम्बी-लम्बी गणनाओं को दर्शाने से बचें। बहुत अधिक विवरण देने और छिपी हुई (अ-उल्लेखित) गणनाओं पर निर्भर चरण को छोड़कर अगले चरण पर चले जाने, के बीच सन्तुलन बनाकर रखें।
- सुलभ भाषा** : उन विशिष्ट शब्दावली और संकेत शब्दों के उपयोग को टालें जिनसे सिर्फ विशेषज्ञ ही परिचित होते हैं। यदि तकनीकी शब्दों का उपयोग ज़रूरी हो तो उन्हें परिभाषित कर दें।
- दृश्यों का प्रयोग** : जहाँ सम्भव हो वहाँ ऐसे रेखाचित्र या फ़ोटो दें जिनमें गणितीय विचार का सार हो। यदि कोई चित्र या रेखाचित्र गणित की किसी अवधारणा को स्पष्ट करते हों तो उन्हें अवश्य रखें।
- संक्षिप्त सन्दर्भ** : संक्षिप्त अनुशंसाओं के साथ सन्दर्भों (reference) की एक संक्षिप्त सूची दें।
- अभ्यास और सवाल** : लेख की शुरुआत या अन्त में विचार करने के लिए कुछ सवाल और कुछ अभ्यास उपलब्ध कराएँ।
- उद्धरण प्रारूप (Citation Format)** : लेख के अन्त में, स्रोतों और सन्दर्भों को जिस क्रम में वे आए हैं उस ही क्रम में उन्हें उद्धृत (cite) करें। फुटनोट से बचें। यदि फुटनोट की आवश्यकता है, तो उनका क्रम डालकर अलग से लिखें।
- संक्षिप्ताक्षर और परिवर्णी शब्द (Abbreviations and Acronyms)** : लेख में जब पहली बार किसी शब्द का लघु रूप (यानी संक्षिप्ताक्षर) और कई शब्दों के शुरुआती अक्षर का प्रचलित लघु रूप (यानी परिवर्णी) आए तब वहीं उनका अर्थ बता दें। ऐसे सभी शब्दों की एक शब्दावली बनाकर उसे लेख के अन्त में प्रस्तुत करें।
- चित्रों को नामांकित करना** : लेख में आने वाले सभी चित्रों, रेखाचित्रों, तस्वीरों पर चित्र क्रमांक डालें और उनका विवरण लिखें। इन सभी चित्रों, रेखाचित्रों, तस्वीरों को स्पष्ट निर्देशों के साथ ईमेल में अलग से अटैच करें। (ध्यान दें कि खीची गई तस्वीरों या स्कैन तस्वीरों की गुणवत्ता 300dpi से कम नहीं होना चाहिए।)
- चित्रों का विवरण स्पष्टता से दें** : तस्वीरों, चित्रों, डायग्राम्स और तालिकाओं का उल्लेख उनके उचित क्रमांक से करें। 'यहाँ', 'वहाँ', 'दाईं ओर', 'बाईं ओर', 'ऊपर', 'नीचे' इस तरह से उल्लेख करने से परहेज करें।
- लेखक का परिचय** : लेखक अपनी हाई रिजोल्यूशन फ़ोटो भी भेजें। साथ ही, अपने बारे में संक्षिप्त में (जो 50 शब्दों से ज्यादा का नहीं हो) जानकारी भेजें, जो पाठकों को आपके अनुभव व विशेष योग्यता वाले कार्यक्षेत्र के बारे में बताती हो।
- ब्रिटिश वर्तनी (Spellings)** : ब्रिटिश वर्तनी का पालन करें। जैसे organise लिखें न कि organize; colour लिखें न कि color, neighbour लिखें न कि neighbor आदि।
- आप अपने लेख हिन्दी में भी भेज सकते हैं। उपयुक्त होने पर हम उन्हें अंग्रेज़ी में अनूदित करके प्रकाशित करेंगे।
- लेख भेजने का प्रारूप** : लेखों को MS Word या LaTeX में लिखकर ही भेजें।

मुद्रक तथा प्रकाशक शरद सुरे, रजिस्टार द्वारा अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी के लिए आदर्श प्रा.लि., 4 शिखरवार्ता, प्रेस काम्पलेक्स, जोन-1,
एम.पी.नगर, भोपाल 462 011 से मुद्रित
एवं अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी, सर्वे नम्बर 66, बुरुगुटे विलेज, बिक्कनाहल्ली मेन रोड, सरजापुरा, बेंगलूरु, कर्नाटक- 562 125 से प्रकाशित
सम्पादक : स्नेहा टाइटस

अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी एट राइट एंगल्स

स्कूल गणित के लिए एक संसाधन



पैटर्न्स और पूर्व-बीजगणित

पद्मप्रिया शिराली

पैटर्न्स और पूर्व-बीजगणित

गणित पैटर्न्स का अध्ययन है। आमतौर पर यह अध्ययन संख्याओं या ज्यामिति के विषय से जुड़ा होता है लेकिन कई चीजों व स्थानों में भी पैटर्न्स का अध्ययन किया जाता है।

पैटर्न्स खूबसूरत होते हैं और हमारा ध्यान खींचते हैं। हम इन्हें अपने आस-पास बनने वाली इमारतों, कपड़ों या अन्य चीजों में ढूँढ लेते हैं।

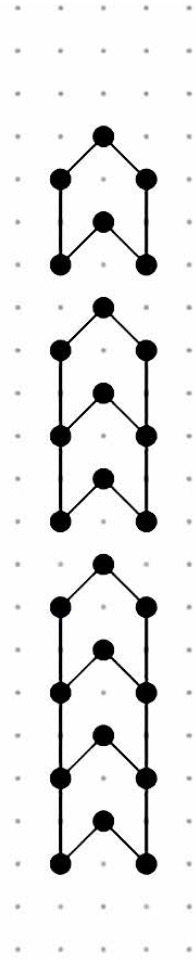
इन पैटर्न्स को हम किस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं? कुछ दृश्य पैटर्न्स हैं, जिनमें एक समान लक्षण होते हैं। कुछ संख्या आधारित पैटर्न्स होते हैं, जो संख्या पर जोड़ या घटा के प्रयोग से एक अनुक्रम में आगे बढ़ते हैं। कुछ पैटर्न्स गुणा और भाग पर आधारित होते हैं। अगर हमें पहली कुछ संख्याएँ पता हों तो हम उस अनुक्रम या शृंखला में अगली या उसके बाद आने वाली संख्याओं का पता लगा सकते हैं।

बच्चे इन पैटर्न्स से परिचित हैं और वे अपनी कलाकृतियों में इनका प्रयोग भी करते हैं। उनके अन्दर पैटर्न्स का एक स्वाभाविक ज्ञान होता है और वे शृंखला में आने वाले अगले पैटर्न्स का पता लगा सकते हैं।

बीजगणित के शिक्षण के दौरान विद्यार्थियों के इसी स्वाभाविक ज्ञान को बढ़ावा देने की ज़रूरत है ताकि वे अपनी समझ को एक स्पष्ट और सारगर्भित तरीके से व्यक्त कर सकें। पैटर्न्स को समझकर उसका सामान्यीकरण कर पाने की क्षमता बीजगणित सीखने में एक आधार का काम करेगी।

बीजगणित पढ़ने से पूर्व पैटर्न्स की जानकारी होने से और भाषा के ज़रिए इन्हें व्यक्त कर पाने की क्षमता से गणितीय कथन व्यक्त कर पाने की क्षमता का विकास होता है। बाद में जब विद्यार्थी चर (variables) से परिचित होते हैं तो वे इन कथनों को चर और संक्रियाओं के माध्यम से व्यक्त करना सीखते हैं।

चित्र-1 में दिए गए पैटर्न्स से सम्बन्धित एक उदाहरण यहाँ दिया गया है। “रेखाओं की कुल संख्या रॉकेट आकार वाली आकृतियों की संख्या के चौगुने से 2 ज़्यादा है।” इसी कथन को बाद में इस तरह व्यक्त किया जा सकता है : “4 गुणा n में 2 का जोड़ 1 के बराबर होता है।” यहाँ 1 रेखाओं की संख्या है और n रॉकेट आकार वाली आकृतियों की संख्या। इसे $1 = 4n + 2$ भी लिख सकते हैं।



चित्र-1

की-वर्ड : पैटर्न्स, अनुक्रम, नियम, सम्बन्ध, सम्प्रेषण, भाषा

पैटर्न-1 : राकेट, बिन्दु और रेखाएँ

चित्र-1 में कई सारी रॉकेटनुमा आकृतियाँ हैं जो रेखाओं और बिन्दुओं से मिलकर बने एक पैटर्न की तरह नज़र आ रही हैं। हर रेखा दो बिन्दुओं को आपस में इस तरह जोड़ रही है कि रॉकेटनुमा आकृति बनती रहे।

विद्यार्थियों को पहली रॉकेट आकृति में इस्तेमाल की गई रेखाओं की संख्या निकालने और कॉपी में लिखने को कहें। दूसरी आकृति को बनाने में कितनी रेखाओं और बिन्दुओं का इस्तेमाल हुआ है? तीसरी आकृति में कितने? विद्यार्थी इस सूचना को एक तालिका में भर सकते हैं।

विद्यार्थी यह पाएँगे कि हर अगली आकृति में 4 रेखाएँ बढ़ जाती हैं। तो, 20 रॉकेट आकृतियों के लिए ऐसी कितनी रेखाओं की ज़रूरत पड़ेगी?

उन्हें बिन्दुओं की संख्या में भी एक पैटर्न नज़र आएगा।

क्या उन्हें बिन्दुओं की संख्या और रेखाओं की संख्या में कोई सम्बन्ध नज़र आता है?

अब यह सवाल करें : दूसरे कॉलम की संख्याओं (रेखाओं की संख्या) और पहले कॉलम की संख्याओं (रॉकेट आकृतियों के क्रमांक) में क्या सम्बन्ध है? विद्यार्थी यह पाएँगे कि रेखाओं की संख्या आकृतियों की संख्या की गुणज नहीं है। हालाँकि, वे यह पाएँगे कि हर अगली आकृति में रेखाओं की संख्या चार बढ़ जाती है। अगर विद्यार्थी इस सम्बन्ध को नहीं समझ पा रहे हैं तो शिक्षक अपने सवालों से उन्हें यह सम्बन्ध स्पष्ट कर सकते हैं। क्या वे इस तथ्य का प्रयोग कर सकते हैं कि पहली आकृति में बाकियों की अपेक्षा दो रेखाएँ ज़्यादा हैं?

इस सम्बन्ध को शब्दों के माध्यम से व्यक्त कर पाने में विद्यार्थियों की मदद करें।

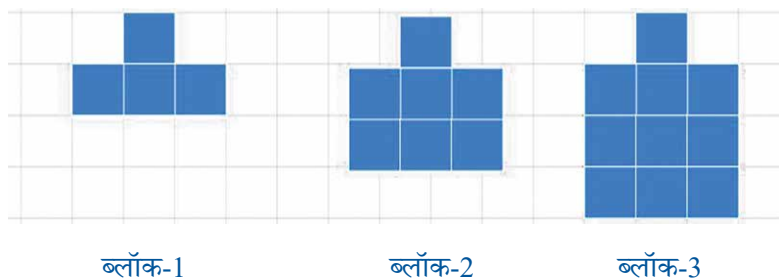
रेखाओं की संख्या रॉकेट आकृतियों के क्रमांक के चौगुने से दो ज़्यादा है।

रॉकेटनुमा आकृति का क्रमांक	रेखाओं की संख्या	बिन्दुओं की संख्या
1	6	6
2	10	9
3	14	12
4	18	15

रॉकेटनुमा आकृति का क्रमांक	रेखाओं की संख्या	
1	6	$1 \times 4 + 2$
2	10	$2 \times 4 + 2$
3	14	$3 \times 4 + 2$
4	18	$4 \times 4 + 2$

पैटर्न 2 : बढ़ते ब्लॉक

हर ब्लॉक के क्रमांक और उसे बनाने में लगे वर्गों की संख्या के बीच सम्बन्ध की पड़ताल करने के लिए विद्यार्थियों को एक तालिका में वर्गों की संख्या लिखने कहें।



ब्लॉक-1

ब्लॉक-2

ब्लॉक-3

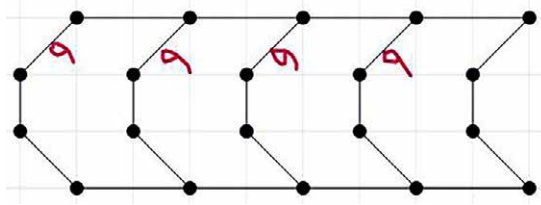
चित्र-2

ब्लॉक	1	2	3
वर्गों की संख्या			

अगर इस क्रम में वर्गों की संख्या 67 है तो उस ब्लॉक का क्रमांक क्या होगा?

पैटर्न-3 : फलक

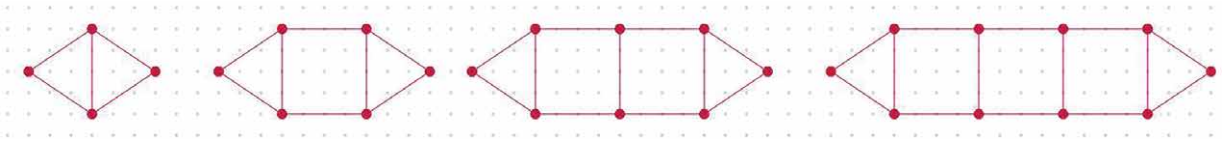
यहाँ रेखाओं और बिन्दुओं से बने फलकों की एक शृंखला दी गई है।



चित्र-3

विद्यार्थी रेखाओं और बिन्दुओं की संख्या एक तालिका में दर्ज करके इसके माध्यम से फलकों की संख्या और उसे बनाने में इस्तेमाल हुई रेखाओं की संख्या का सम्बन्ध समझ सकते हैं। बिन्दुओं की संख्या और रेखाओं की संख्या में क्या सम्बन्ध है? अगर यहाँ 7 फलक हुए तो कुल रेखाओं की संख्या कितनी होगी?

पैटर्न-4 : फैलती आकृतियाँ



आकृति-1

आकृति-2

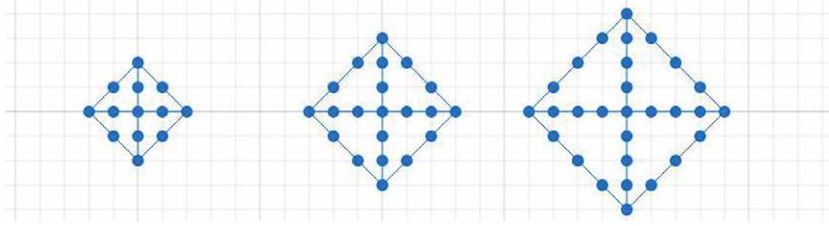
आकृति-3

आकृति-4

चित्र-4

इन आकृतियों और इन्हें बनाने में लगने वाली रेखाओं की संख्या का सम्बन्ध समझने के लिए एक तालिका बनाएँ।

पैटर्न-5 : बढ़ते वर्ग



वर्ग-1

वर्ग-2

वर्ग-3

चित्र-5

इन आकृतियों में क्या हो रहा है? इनके बारे में विद्यार्थियों से उनकी समझ जानें। उनका जवाब उनके अवलोकन पर आधारित होगा।

कुछ विद्यार्थी बिन्दुओं की संख्या गिनेंगे तो कुछ रेखाओं की संख्या।

क्या वे उन बिन्दुओं को पहचान पाते हैं जो इन सभी आकृतियों में उपयोग किए जा रहे हैं?

उनकी संख्या कितनी है? क्या इस संख्या का उपयोग वर्ग के

क्रमांक और बिन्दुओं की संख्या के बीच के सम्बन्ध को समझने के लिए किया जा सकता है?

बाक़ी बिन्दुओं के साथ क्या हो रहा है?

विद्यार्थी बिन्दुओं की संख्या की गिनती करके समझ सकते हैं कि वर्ग का आकार बढ़ने पर बिन्दुओं की संख्या किस तरह बढ़ती है।

यह सवाल पूछें : “अगर बिन्दुओं की संख्या 77 है तो वर्ग क्रमांक क्या होगा?”

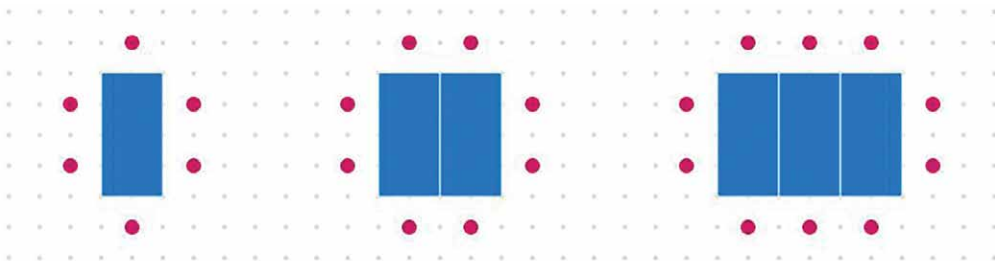
क्या विद्यार्थी ऐसी आकृति बना सकते हैं जो दोहराई और बढ़ाई जा सके? क्या वे इस पैटर्न को बोलकर समझा सकते हैं?

वर्ग क्रमांक	1	2	3
बिन्दुओं की संख्या			

पैटर्न-6 : टेबल और कुर्सी

यहाँ एक क्लासरूम में टेबल-कुर्सी की व्यवस्था दिखाई गई है।

यदि इस पैटर्न को आगे बढ़ाते हैं तो कुर्सी की संख्या किस आधार पर बढ़ेगी?



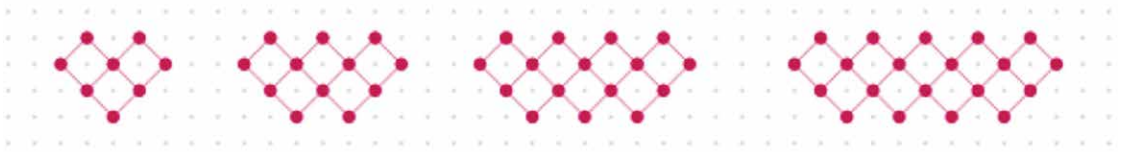
चित्र-6

टेबल की संख्या	1	2	3	4
कुर्सी की संख्या	6			
सम्बन्ध			

पैटर्न-7 : वर्गों से पैटर्न बनाना

यदि इस पैटर्न को आगे बढ़ाएँगे तो बिन्दुओं की संख्या किस आधार पर बढ़ेगी?

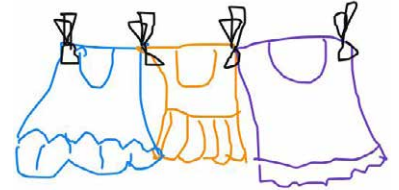
इसी पैटर्न की 10वीं आकृति में कुल कितने बिन्दु होंगे?



चित्र-7

पैटर्न-8 : कपड़े और क्लिप

कपड़े सुखाने की समस्या : कपड़ों के लिए कितने क्लिप हैं? अगर कपड़ों की संख्या बढ़ेगी तो क्या उसी हिसाब से क्लिप की संख्या भी बढ़ेगी?



चित्र-8

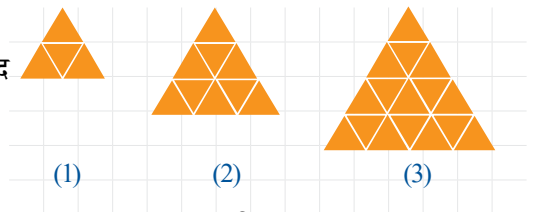
पैटर्न-9 : त्रिभुज और रेखाएँ

नारंगी त्रिभुजों के अन्दर मौजूद त्रिभुजों को ध्यान से देखिए और निम्नलिखित सवालों के जवाब दीजिए –

चित्र-9 (1) में भीतरी त्रिभुजों को बनाने में कितनी सफ़ेद रेखाएँ लग रही हैं?

चित्र-9 (2) की दो पंक्तियों में मौजूद त्रिभुजों को बनाने के लिए कितनी सफ़ेद रेखाएँ लग रही हैं?

अगर हम इस पैटर्न को आगे बढ़ाते हैं तो 4 पंक्तियों में आने वाले त्रिभुजों के लिए कितनी सफ़ेद रेखाओं की ज़रूरत पड़ेगी? 5 पंक्तियों में आने वाले त्रिभुजों के लिए कितनी सफ़ेद रेखाओं की ज़रूरत होगी?



चित्र-9

पंक्ति क्रमांक और सफेद रेखाओं की कुल संख्या के बीच एक सीधा सम्बन्ध बताना तो मुश्किल है। हालाँकि, प्रयोग में आई अतिरिक्त रेखाओं की कुल संख्या के आधार पर एक सम्बन्ध नज़र आ रहा है।

पंक्ति के क्रमांक और सफेद रेखाओं की कुल संख्या के बीच क्या सम्बन्ध है?

पहली पंक्ति में यह 3×1 है।

दूसरी पंक्ति में यह $3 \times 2 + 3 \times 1$ है।

तीसरी पंक्ति में यह $3 \times 3 + 3 \times 2 + 3 \times 1$ है।

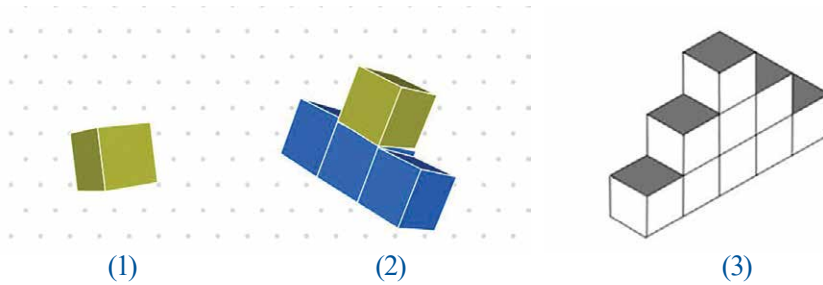
इस तरह चौथी पंक्ति में होगी...

पंक्ति	रेखाओं की संख्या	
1	3	3
2	9	3 + 6
3	18	3 + 6 + 9
4		

पैटर्न-10 : चढ़ती-उतरती सीढ़ियाँ

इस पैटर्न में पहली आकृति में 1 ब्लॉक है। दूसरी आकृति में 4 ब्लॉक हैं। इसी पैटर्न में तीसरी आकृति को बनाने में कितने ब्लॉक लगेंगे?

क्या विद्यार्थी एक तालिका बना सकते हैं और उसकी मदद से इस पैटर्न के हर बार बढ़ने वाले ब्लॉकों की संख्या मालूम कर सकते हैं?



चित्र-10

पैटर्न-11 : पैटर्न और संख्याओं की गणना का नियम

हम तीन क्रमागत संख्याओं के इन समूहों को लेते हैं :

6, 7, 8

11, 12, 13

चित्र-11

हमें इन समूहों में कैसा पैटर्न नज़र आता है?

$6 + 8 = 14$ होता है और 14, 7 का दोगुना भी है।

क्या यही बात दूसरे समूह पर भी लागू होती है?

$11 + 13 = 24$ होता है और 24, 12 का दोगुना भी है।

क्या यह बात तीन क्रमागत संख्याओं के किसी भी समूह पर लागू होती है? विद्यार्थियों को इसकी जाँच करने को कहें। ऐसा क्यों होता है? 6 और 7 आपस में किस तरह सम्बन्धित हैं? इनमें कितने का अन्तर है? 8, 7 से किस तरह सम्बन्धित है? यह इससे कितना ज़्यादा है?

क्या वे बतला सकते हैं कि 6 और 8 का जोड़ बीच वाली संख्या 7 का दोगुना क्यों है?

अगर हम 6 और 8 को गुणा कर दें तो? $6 \times 8 = 48$ मिलेगा। अगर हम 7 का खुद 7 से गुणा करें तो हमें 49 मिलता है। 6×8 का गुणनफल 7×7 से 1 कम है।

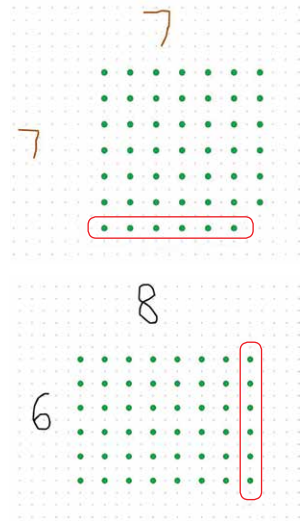
क्या यह 11, 12, 13 पर भी लागू होता है?

$$11 \times 13 = 143. \quad 12 \times 12 = 144.$$

इस सम्बन्ध को समझने के लिए विद्यार्थियों को बिन्दुओं की एक 6×8 और एक 7×7 की व्यवस्था जमाने को कहें।

यदि हम 6×8 की व्यवस्था से 6 बिन्दुओं वाले एक कॉलम को वहाँ से हटाकर इसे 7×7 व्यवस्था की एक पंक्ति बना दें तो सिर्फ़ आखिर कॉलम को छोड़कर बाक़ी हमें 7×7 वाली एक जमावट मिल जाएगी।

विद्यार्थियों को बिन्दुओं की जमावट माध्यम से यह दिखाने को कहें कि 11×13 का गुणनफल 12×12 से 1 कम होगा।



चित्र-12

पैटर्न-12 : 4 क्रमागत संख्याएँ

अब विद्यार्थी 4 क्रमागत संख्याओं के समूहों को देख सकते हैं।

9, 10, 11, 12 4, 5, 6, 7

चित्र-13

9, 10, 11 और 12 का आपस में क्या सम्बन्ध है? क्या 4, 5, 6 और 7 में इसी तरह का सम्बन्ध है? विद्यार्थी इन समूहों में मौजूद संख्याओं के विभिन्न युग्मों का योग हासिल कर इनमें सम्बन्ध तलाश सकते हैं।

वे 4 और 5 तथा 6 और 7 को आपस में जोड़ सकते हैं।

4 और 5 का योग 9 तथा 6 और 7 का योग 13 होता है। 9 और 13 में 4 का अन्तर है।

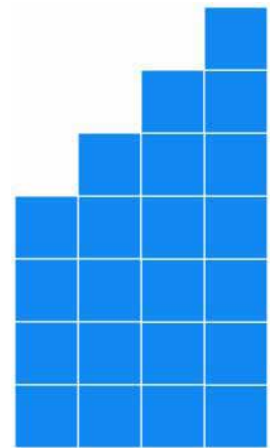
अगर वे चार विभिन्न क्रमागत संख्याओं के समूह के साथ यही संक्रिया करें तो क्या होगा?

9 और 10 का योग 19 तथा 11 और 12 का योग 23 होता है। 19 और 23 में भी 4 का अन्तर है।

क्या विद्यार्थी इस परिणाम की व्याख्या कर सकते हैं?

यदि वे 4 और 7 तथा 5 और 6 को जोड़ें तो क्या होगा? 4 और 7 तथा 5 और 6 दोनों युग्मों का योग 11 ही है। क्या यही परिणाम 9, 10, 11 और 12 के समूह से भी मिलता है?

वे अपने परिणामों को एक कथन के रूप में कैसे व्यक्त कर सकते हैं?



चित्र-14

पैटर्न-13 : 4 क्रमागत संख्याओं का जोड़

उन्हें 1 से लेकर 4 तक की चार क्रमागत संख्याओं को जोड़ने को कहें। इनका जोड़ उन्हें 10 प्राप्त होगा। अगर वे 2 से लेकर 5, 3 से लेकर 6 और 4 से लेकर 7 तक की क्रमागत संख्याओं को जोड़ेंगे तो उन्हें क्या-क्या योगफल प्राप्त होंगे?

इन संख्याओं के योग में उन्हें क्या पैटर्न नज़र आता है? क्या वे इस पैटर्न का कारण बता सकते हैं? क्या वे इस पैटर्न को एक कथन में व्यक्त कर सकते हैं?

विद्यार्थियों को इन संख्याओं को जोड़कर उनका योगफल तालिका में भरने को कहें।

संख्याएँ	1 से 4	5 से 8	9 से 12	13 से 16
जोड़	10			

उन्हें यहाँ कैसा पैटर्न नज़र आता है? क्या वे इसका कारण बता सकते हैं?

पैटर्न-14 : किसी संख्या के क्रमागत गुणक

एक संख्या के चार क्रमागत गुणज में 1 की बढ़ोत्तरी करने के बाद उनसे बना संख्याओं का समूह यहाँ प्रस्तुत है :

13, 16, 19, 22

यह संख्या के गुणज की यह शृंखला है, जिसमें 1 जोड़ा गया है।

उन संख्याओं का पता लगाएँ जिन्हें गुणा करने और घटाने पर यह शृंखला मिलती है :

22, 26, 30, 34

इस सम्बन्ध को एक रेखा में व्यक्त किया जा सकता है।

यह शृंखला __ की गुणज है, जिसमें से __ घटाया गया है।

इस शृंखला को __ का गुणज भी माना जा सकता है, जिसमें 2 जोड़ा गया है। क्या विद्यार्थी बता सकते हैं कि यह कैसे सम्भव है?

शिक्षक इस नियम को लागू कर गुणजों की शृंखला बना सकते हैं। और फिर विद्यार्थियों से पूछ सकते हैं कि इस शृंखला को बनाने वाली संख्या का पता लगाएँ।

क्या यह नियम प्रत्येक संख्या के लिए लागू होगा?

पैटर्न-15 : सिक्कों की पोटलियाँ

हमारे पास 5, 2 और 1 रुपए के सिक्कों की तीन पोटलियाँ हैं। आप तीनों पोटलियों से कुल 5 सिक्के ले सकते हैं। यदि आपको कुल 9 रुपए चाहिए तो आप किस पोटली से कितने सिक्के लेंगे? विद्यार्थी इसके जवाब में 1 रुपए के चार सिक्के और 5 रुपए का एक सिक्का कह सकते हैं।



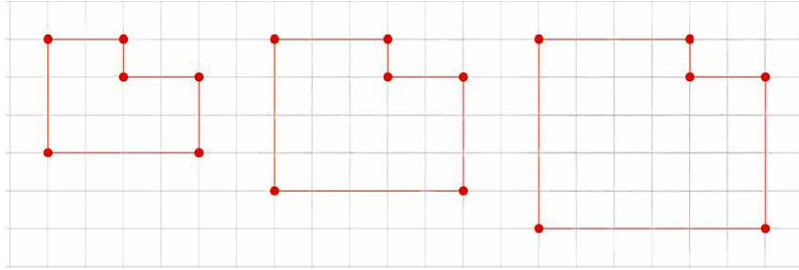
चित्र-15

यदि आपको कुल 18 रुपए चाहिए तो आप किस पोटली से कितने सिक्के लेंगे?

पैटर्न-16 : वर्गों की गणना

चित्र-16 में दी गई हर आकृति में कितने वर्ग हैं?

इस उदाहरण में दी गई शृंखला में मौजूद वर्गों की संख्या के आधार को आप कैसे समझाएँगे?



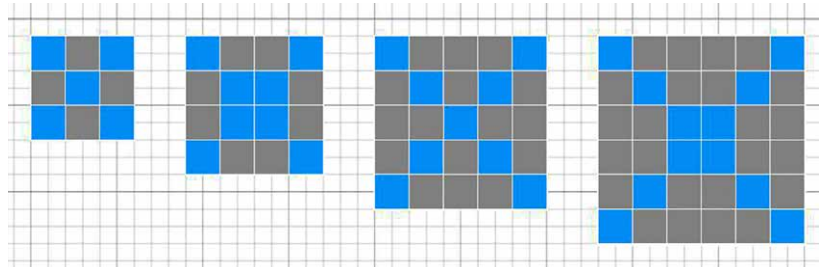
चित्र-16

पैटर्न-17 : वर्गों की डिज़ाइन

हर आकृति में वर्गों का कितना हिस्सा नीले रंग से रंगा हुआ है? हर आकृति में वर्गों का कितना हिस्सा भूरे रंग से रंगा हुआ है? यह हिस्सा घट रहा या बढ़ रहा है?

प्रत्येक नीला और भूरा वर्ग पृष्ठभूमि ग्रिड का 2×2 वर्ग है।

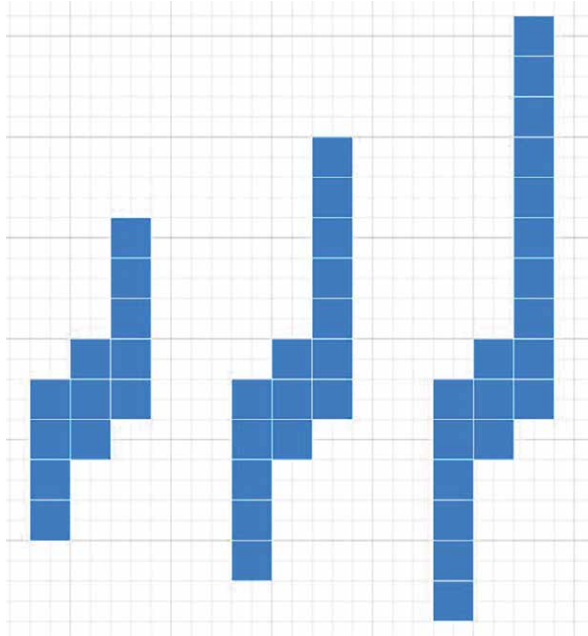
इस शृंखला में नीले वर्गों की संख्या किस आधार पर बढ़ रही है? इस शृंखला में भूरे वर्गों की संख्या किस आधार पर बढ़ रही है?



चित्र-17

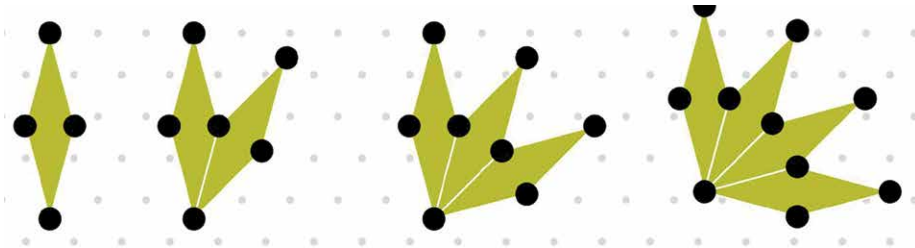
इस क्रम में 10वीं आकृति में नीले वर्गों की संख्या कितनी होगी? आप नीले वर्गों के क्रम को कैसे समझाएँगे?

चित्र-18 में दिए गए ब्लॉकों की संख्या किस आधार पर बढ़ रही है?



चित्र-18

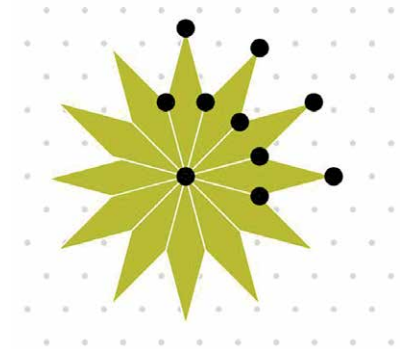
मुश्किल सवाल : फूलदार पैटर्न



चित्र-19

यहाँ एक फूलदार आकृति दी गई है। यह आकृतियाँ किस तरह बढ़ रही हैं?

फूल पूरा करने के लिए कितने बिन्दुओं की ज़रूरत पड़ेगी? पूरे फूल वाली आकृति में कुल कितनी पंखुड़ियाँ होंगी?

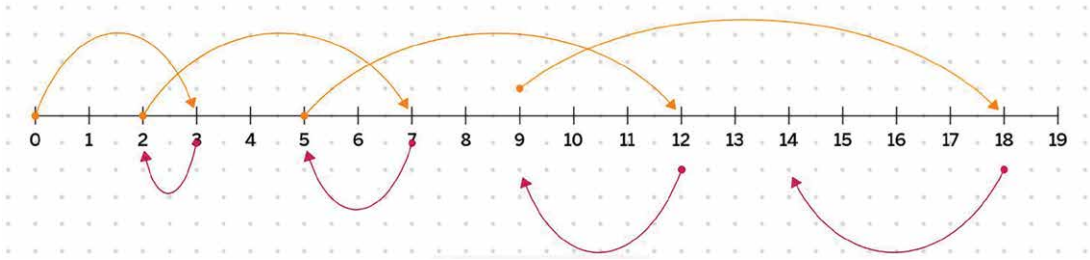


चित्र-20

चित्र-20 की मदद से इसका जवाब मिल सकेगा।

पैटर्न-18 : संख्या रेखा पर छलाँग

चित्र-21 में दर्शाई गई संख्या रेखा पर एक इंजन एक चाल में 3 क्रम आगे जाता है और 1 क्रम पीछे आ जाता है। दूसरी चाल में 5 क्रम आगे जाता है और 2 क्रम पीछे आ जाता है। इसके बाद तीसरी चाल में 7 क्रम आगे जाता है और 3 क्रम पीछे आ जाता है। आगे बढ़ने और पीछे आने का यही पैटर्न चलता रहता है। आठवीं चाल के बाद इंजन कहाँ पर होगा? आप इस शृंखला का विवरण किस तरह देंगे?

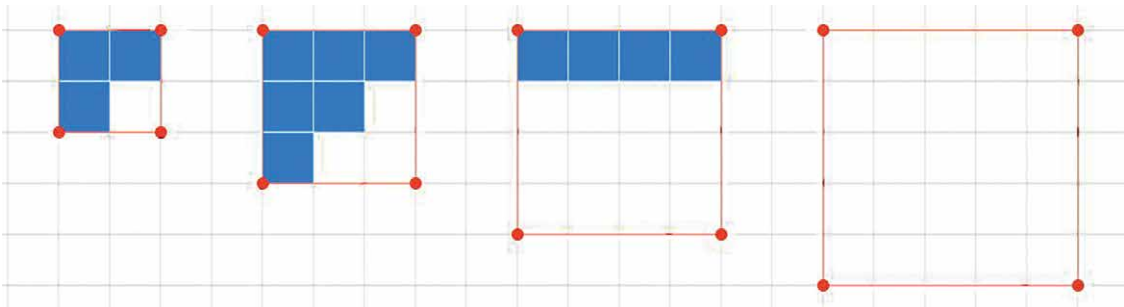


चित्र-21

पैटर्न-19 : वर्गों में भिन्न

यहाँ दिए गए वर्ग की शृंखला में पहले वर्ग की पहली पंक्ति पूरी तरह रंगी हुई है। दूसरी पंक्ति में पहली पंक्ति से एक वर्ग कम रंगा हुआ है। आगे वर्ग भी इसी पैटर्न के अनुसार बढ़ते हैं। यहाँ वर्गों का कितना हिस्सा (भिन्न) रंगा हुआ है? आपको इन वर्गों में भिन्न का कैसा पैटर्न नज़र आ रहा है? भिन्न का हर (denominators) किस तरह बढ़ रहा है? अंश किस तरह बढ़ रहा है? आप इस शृंखला का विवरण किस तरह देंगे?

रंगे हुए वर्गों का हिस्सा (भिन्न) बढ़ रहा है या घट रहा है?



चित्र-22

पैटर्न-20 : तालिकाएँ

इन तालिकाओं में क्या हो रहा है? विभिन्न संक्रियाएँ लगाकर नियम का पता लगाएँ। इस नियम को आप किस तरह बताएँगे?

इनपुट	आउटपुट
7	41
9	51
3	21
6	36

इनपुट	आउटपुट
8	63
13	168
11	120
15	224

पैटर्न-21 : ग्रिड्स

यहाँ पैटर्न के आधार पर एक ग्रिड बनाई गई है। बाएँ से दाएँ जाने पर संख्याओं में 6 की बढ़त नज़र आती है और ऊपर से नीचे की तरफ़ जाने पर हर संख्या 5 बढ़ जाती है।

इस ग्रिड में समान रंग से रंगी हुई संख्याएँ आपस में किस नियम के तहत जुड़ी हुई हैं?

0	6	12	18	24
5	11	17	23	29
10	16	22		
15	21			

इस ग्रिड में समान रंग से रंगी हुई संख्याएँ आपस में किस नियम के तहत जुड़ी हुई हैं?

0	6	12	18	24
5	11	17	23	29
10	16	22		
15	21			

इस ग्रिड में समान रंग से रंगी हुई संख्याएँ आपस में किस नियम के तहत जुड़ी हुई हैं?

0	6	12	18	24	29
5	11	17	23		
10	16	22			
15	21				

इस ग्रिड में संख्या भरें और एक नियम के तहत उन्हें रंगें। अपने मित्र को ग्रिड दिखाएँ। क्या आपका मित्र वह नियम पहचान पाया?

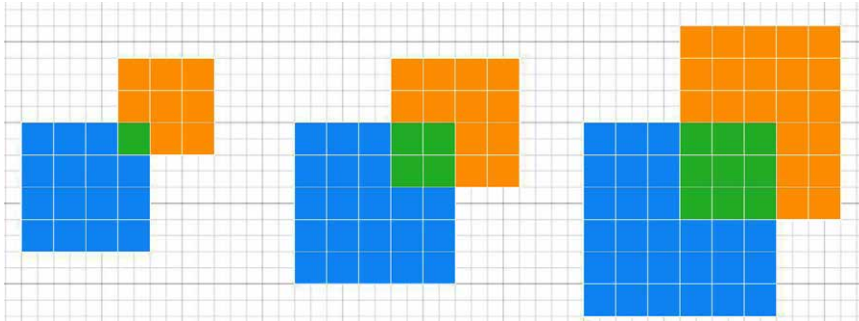
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13						

पैटर्न-22 : एक-दूसरे में जाने वाले वर्ग

इस समूची आकृति की परिधि कैसे बढ़ रही है?

आकृति में प्रत्येक रंगीन वर्ग पृष्ठभूमि ग्रिड का 2×2 वर्ग है।

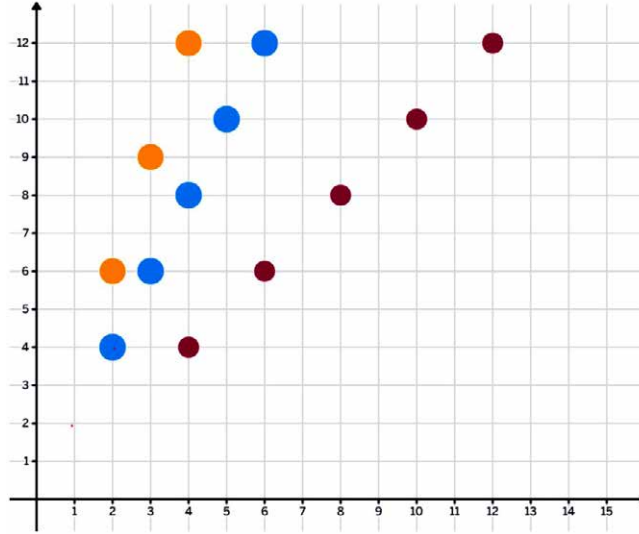
इस समूची आकृति का क्षेत्रफल किस तरह बढ़ रहा है?



चित्र-23

पैटर्न-23 : ग्राफ और बिन्दु

एक ही रंग के बिन्दु किस नियम के तहत एक-दूसरे से जुड़े हैं?



चित्र-24

पैटर्न-24 : जादुई वर्ग

यहाँ एक जादुई वर्ग दिया गया है। इस वर्ग का जादुई जोड़ कितना होगा?

इस वर्ग में संख्याओं की व्यवस्था में आपको कौन-सा पैटर्न नज़र आता है?

13	8	15
14	12	10
9	16	11

चित्र-25

केन्द्र में स्थित संख्या का विपरीत कोनों पर स्थित संख्याओं से क्या सम्बन्ध है?

- (1) केन्द्र में स्थित संख्या, उसके ऊपर और नीचे स्थित संख्याओं से किस तरह सम्बन्धित है?
- (2) केन्द्र में स्थित संख्या, उसके दाएँ और बाएँ स्थित संख्याओं से किस तरह सम्बन्धित है?



पद्मप्रिया शिराली

पद्मप्रिया शिराली सामुदायिक गणित केन्द्र का हिस्सा हैं, जो वैली स्कूल (बेंगलूर) और ऋषि वैली (आन्ध्र प्रदेश) में स्थित है, जहाँ वे 1983 से विभिन्न विषयों – गणित, कम्प्यूटर एप्लिकेशन, भूगोल, अर्थशास्त्र, पर्यावरण अध्ययन और तेलुगू – को पढ़ा रही हैं। 1990 के दशक में, उन्होंने स्वर्गीय श्री पी. के. श्रीनिवासन के साथ मिलकर काम किया। वे उस टीम का हिस्सा थीं जिसने ऋषि वैली ग्रामीण केन्द्र (ऋषि वैली रूरल सेंटर) के मल्टी ग्रेड प्रारम्भिक शिक्षा कार्यक्रम को बनाया, जिसे 'स्कूल इन ए बॉक्स' के नाम से जाना जाता है। वे वर्तमान में एनसीईआरटी पाठ्यपुस्तक विकास समूह का हिस्सा हैं। पद्मप्रिया से padmapriya.shirali@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : मृणाल चन्द्र **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुसा **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय

अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी एट राइट एंगल्स

स्कूल गणित के लिए एक संसाधन

गणित और गणित शिक्षा पर एक गहन,
गम्भीर पत्रिका।

शिक्षकों, शिक्षक-प्रशिक्षकों और
विषय से जुड़े विद्यार्थियों के लिए।

इस पत्रिका में, शिक्षक :

- कक्षा में या अन्यत्र उपयोग के लिए संसाधनों तक पहुँच सकते हैं
- ऐसे गणितीय विषयों के बारे में भी पढ़ सकते हैं, जो सम्भवतः नियमित स्कूली पाठ्यक्रम में नहीं होते हैं
- अपने स्वयं के लिखे लेख भेज सकते हैं
- पत्रिका के माध्यम से अन्य लोगों के साथ बातचीत कर सकते हैं, और अपनी अनसुलझी समस्याओं को हल कर सकते हैं
- अपने मूल अवलोकन और खोजों को साझा कर सकते हैं
- स्कूल स्तर के गणित के विभिन्न पहलुओं के बारे में लिख सकते हैं और चर्चा कर सकते हैं।

आप एट राइट एंगल्स यहाँ से प्राप्त कर सकते हैं :

निःशुल्क सदस्यता लें

<https://azimpremjiuniversity.edu.in/at-right-angles>

इस लिंक पर एट राइट एंगल्स के हाई-रेज और लो-रेज संस्करण निःशुल्क डाउनलोड के लिए उपलब्ध हैं। अलग-अलग लेख भी नीचे दी गई लिंक से डाउनलोड किए जा सकते हैं

<https://bit.ly/AtRightAnglesrepositor>

फेसबुक पर

<https://www.facebook.com/groups/829467740417717/>

AtRiUM (एट राइट एंगल्स, अस एंड मैथ)
पत्रिका का फेसबुक पेज है।

यह ई-स्पेस में हमारे पाठकों को जोड़ने के

लिए एक मंच के रूप में कार्य करता है। शिक्षक, विद्यार्थी, शिक्षक-प्रशिक्षक, भाषाविद् और शिक्षाशास्त्र के विशेषज्ञ इस समुदाय का हिस्सा हैं, इस कारण से इसकी पोस्ट में विविधता है और चर्चाएँ भी गम्भीर और गहन होती हैं।

ई-मेल पर

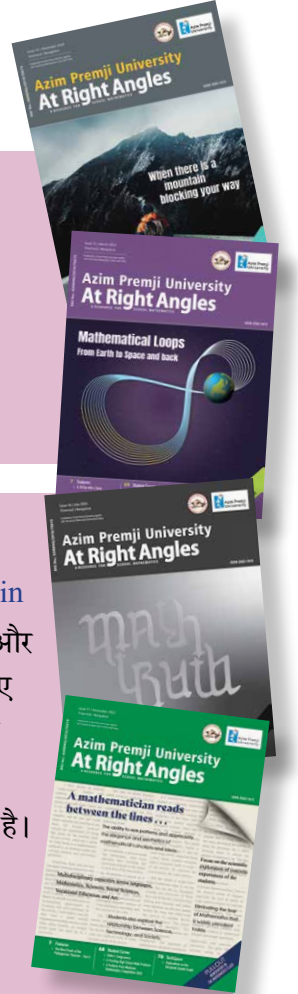
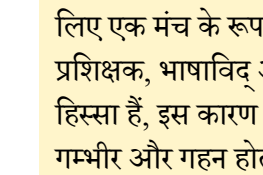
AtRightAngles.editor@apu.edu.in

हम इस ईमेल आईडी पर आपके लेखों और राय का स्वागत करते हैं। लेख भेजने लिए नीति और दिशा-निर्देश पत्रिका के अन्दर दिए गए हैं।

आपकी प्रतिक्रिया हमारे लिए महत्वपूर्ण है। हमें अवश्य लिखें।

प्रकाशक :

अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी



Azim Premji University
Survey No. 66, Burugunte Village,
Bikkanahalli Main Road, Sarjapura
Bengaluru – 562125

azimpremjiuniversity.edu.in

Facebook: /azimpremjiuniversity

Instagram: @azimpremjiuniv

X: @azimpremjiuniv